Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Patrick Kurth

19. Januar 2012

Analysis I

11. Übungsblatt

Aufgabe 11.1 Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto F(t)$ definiert durch

$$F(t) := \int_0^1 \frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2} dx.$$

(i) Zeigen Sie, dass F differenzierbar ist mit der Ableitung

$$F'(t) = -2e^{-t^2} \int_0^t e^{-u^2} du.$$

(ii) Zeigen Sie

$$\left(\int_0^t e^{-u^2} du \right)^2 = \frac{\pi}{4} - F(t) \quad \text{und} \quad \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Aufgabe 11.2 Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}((0,\infty),\mathbb{R})$ definiert durch

$$f_n(x) := \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}}$$

auf Konvergenz. Existieren die Integrale $\int_0^\infty f_n(x)dx$? Darf man Limesbildung und Integration vertauschen?

Aufgabe 11.3

(i) Seien $I = (0, a)$ $(a > 0)$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : \bar{I} \times \bar{I} \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$ stetig. Für alle $x \in \bar{I}$, $t \in \bar{I}$ existiere

$$g(x,t) := \frac{\partial}{\partial t} f(x,t).$$

Weiter sei g in $\bar{I} \times \bar{I}$ stetig. Berechnen Sie folgende Ableitung.

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(x,t)dx.$$

Bitte Rückseite beachten ↷

(*ii*) Berechnen Sie unter Verwendung der Ergebnisse aus Aufgabenteil (*i*) folgende Ableitung.

$$\frac{d}{dt}\int_0^t e^{-xt}dx.$$

Aufgabe 11.4 Wie definieren

$$C_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \Big\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ ist unendlich oft differenzierbar,}$$
$$\exists a,b \in \mathbb{R} \text{ mit } a < b \text{ und } \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}} \subset [a,b] \Big\}.$$

Für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sei die Fouriertransformierte $F(f) \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ von f definiert durch

$$F(f)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi itx}dx.$$

(*i*) Zeigen Sie, dass $F(f)$ für alle $f \in C_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ wohldefiniert ist.

(*ii*) Zeigen Sie, dass für alle $f \in C_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und alle $t \in \mathbb{R}$

$$F(f')(t) = 2\pi it F(f)(t),$$

wobei f' die Ableitung von f sei.

Hinweis: Für $u,v \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$ gilt $f := u + iv \in \mathcal{R}(I,\mathbb{C})$ mit $\int_I f(x)dx = \int_I u(x)dx + i\int_I v(x)dx$.

Abgabe bis Donnerstag 26. Januar 14.00 Uhr in die entsprechend gekennzeichneten Briefkästen auf F4.