Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Patrick Kurth

26. Januar 2012

Analysis I

12. Übungsblatt

Aufgabe 12.1 Sei $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r = 1$. Es gelte $\lim_{x \uparrow 1} f(x) = s$. Weiter sei $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert mit Grenzwert s.

Hinweis: Verwenden Sie den Abelschen Grenzwertsatz.

Aufgabe 12.2

(*i*) Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Wir definieren $\varrho := \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, falls der Grenzwert existiert, bzw. $\varrho := \infty$, falls $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \to \infty$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass ϱ der Konvergenzradius der Potenzreihe ist.

(*ii*) Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{100^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2+i^n} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+1} z^{n^2}.$$

Aufgabe 12.3 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{2^n}.$$

Zeigen Sie, dass f unendlich oft differenzierbar ist.

Aufgabe 12.4 Leonardo von Pisa (Leonardo Pisano, ca 1170 - ca 1250), besser unter dem Namen Fibonacci bekannt, stellte in seinem bekanntesten Werk, dem „Liber abaci" von 1202, die folgende „Kaninchenaufgabe" (Zitat aus H. Heuser, Lehrbuch der Analysis 1):

> *„Jemand brachte ein Kaninchenpaar in einen gewissen, allseits von Wänden umgebenen Ort, um herauszufinden, wieviele [Paare] aus diesem Paar in einem Jahr entstehen würden. Es sei die Natur der Kaninchen, pro Monat ein neues Paar hervorzubringen und im zweiten Monat nach der Geburt [erstmals] zu gebären. [Todesfälle jedoch mögen nicht eintreten.]"*

Die Anzahl an Kaninchenpaaren im n-ten Monat wird von den sogenannten „Fibonaccizahlen" angegeben, die nach folgender Rekursionsformel gebildet werden:

$$a_1 := a_2 := 1, \quad a_{n+2} := a_{n+1} + a_n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

(i) Es sei $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n$. Zeigen Sie, dass $f(x)$ für $|x| < \frac{1}{2}$ konvergiert.
Hinweis: Zeigen Sie $a_n \leq 2^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Zeigen Sie, dass $f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = 1$ für $|x| < \frac{1}{2}$ und leiten Sie hieraus für f folgende Darstellung für $|x|$ hinreichend klein ab:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] x^n.$$

Was können Sie daraus für die Glieder der Fibonaccifolge folgern?
Hinweis: Zeigen sie $\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} - \frac{1}{x_2} \frac{1}{1-\frac{x}{x_2}} \right)$ für geeignete $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Abgabe bis Donnerstag 2. Februar 14.00 Uhr in die entsprechend gekennzeichneten Briefkästen auf F4.