Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Patrick Kurth

3. November 2011

# Analysis I

2. Übungsblatt

**Aufgabe 2.1**

a) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleere, nach oben beschränkte Mengen. Zeigen Sie

$$\sup\{a+b : a \in A, b \in B\} = \sup A + \sup B.$$

b) Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen beschränkt sind und bestimmen Sie ggf. $\sup M$ und $\inf M$.

(i) $M = \left\{x \in \mathbb{R} | x = 1 - \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$,

(ii) $M = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 2x + 2 > 5, x < 0\}$.

**Aufgabe 2.2** Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Aussagen gelten.

(i) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(ii) $a_n := \frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}$ ist eine natürliche Zahl,

(iii) für alle reellen Zahlen $x_1, \dots, x_n \geq 0$ gilt: $\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i) \geq 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

**Aufgabe 2.3** Seien $X$ und $Y$ nichtleere Mengen. Weiter seien $R$ eine Relation auf $X$ und $S$ eine Relation auf $Y$. $RS$ sei eine Relation auf $X \times Y$ definiert durch

$$((x,y),(u,v)) \in RS :\Leftrightarrow (x,u) \in R \wedge (y,v) \in S, \quad (x,y),(u,v) \in X \times Y.$$

Beweisen Sie, dass $RS$ eine Äquivalenzrelation auf $X \times Y$ ist, falls $R$ eine Äquivalenzrelation auf $X$ und $S$ eine Äquivalenzrelation auf $Y$ ist.

**Aufgabe 2.4** Wir betrachten $(\mathscr{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$.

a) Zeigen Sie, dass $\subseteq$ eine Halbordnung auf $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ ist, $(\mathscr{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ jedoch nicht vollständig geordnet ist.

b) Zeigen oder widerlegen Sie: Jede Teilmenge von $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ besitzt bzgl. $\subseteq$ ein kleinstes Element.

Abgabe bis Donnerstag 10. November 14.00 Uhr in die entsprechend gekennzeichneten Briefkästen auf F4.