Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Patrick Kurth

10. November 2011

Analysis I

3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1

a) Untersuchen Sie nachstehend definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Definition des *Grenzwerts* einer Folge („ε-n_0-Definition") auf Konvergenz.

$$a_n := \frac{2n^2-1}{n^2+3}.$$

b) Untersuchen Sie nachstehend definierte Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz, wobei Sie die Grenzwertsätze aus der Vorlesung verwenden dürfen.

(i) $b_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

(ii) $c_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$,

(iii) $d_n := \frac{3n^2(3+\frac{1}{n!})(3n^4-4n^3)}{2(n^2-2)(n^4+\sqrt{n^2+1})}$.

Aufgabe 3.2 Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Weiter seien $a_1 \in \mathbb{R}$ mit $a_1 > \sqrt{a}$ und für $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right).$$

Beweisen Sie:

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n > \sqrt{a}$,

(ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{a}$.

Aufgabe 3.3

a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar.

(i) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4$,

(ii) $(1+i)^{2n} + (1-i)^{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

b) Seien $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|w| < 1$. Zeigen Sie

$$\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right| < 1 \;\Leftrightarrow\; |z| < 1.$$

Bitte Rückseite beachten ↷

Aufgabe 3.4 Sei K eine nichtleere Menge mit einer Ordnung $\prec$ derart, dass $(K, \prec)$ vollständig geordnet ist. Ein Paar (A, B) von nichtleeren Teilmengen von K nennen wir *Dedekindschen Schnitt* $(A|B)$ von K, falls

(i) $K = A \cup B$,

(ii) $A \cap B = \emptyset$,

(iii) für alle $a \in A$, $b \in B$ gilt $a \prec b$.

Ein Element $t \in K$ nennen wie *Trennungszahl* von $(A|B)$, wenn $a \prec t \prec b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$. Zeigen Sie:
Wenn jeder Dedekindsche Schnitt von K genau eine Trennungszahl hat, besitzt jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von K ein Supremum.

Hinweis: Betrachten Sie zu jeder nach oben beschränkten Menge $M \subseteq K$ die Menge aller oberen Schranken von M, die nicht in M liegen.

Abgabe bis Donnerstag 17. November 14.00 Uhr in die entsprechend gekennzeichneten Briefkästen auf F4.