Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Patrick Kurth

17. November 2011

Analysis I

4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1 Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{(n^2)}}$, (ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\alpha^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}_0^+$,

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$, (iv) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{n}-2\right)^2}{n^2+\sqrt{n^4+1}}$.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ *für* $s > 1$ *konvergiert.*

Aufgabe 4.2

a) Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe. Zeigen Sie:

(i) Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ konvergiert.

(ii) Falls $a_k \neq -1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ absolut konvergent.

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{r^{2k}}{(1+r^2)^{k-1}}$ für alle $r \in \mathbb{R}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 4.3 Sei $X = \mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie zu den nachfolgend auf X definierten Metriken d_1, d_2, d_3 und d_4 den durch die jeweilige Metrik gegebenen Einheitskreis

$$B(0,1)_i = \{x \in X \mid d_i(x,0) < 1\} \quad (i = 1 \dots 4).$$

(i) $d_1(x,y) := \sum\limits_{i=1}^{2} |\xi_i - \eta_i|$, wobei $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$,

(ii) $d_2(x,y) := \max\limits_{i=1,2} |\xi_i - \eta_i|$,

(iii) $d_3(x,y) := \sqrt{|x-y|}$,

(iv) $d_4(x,y) := \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$.

Bitte Rückseite beachten ↷

Aufgabe 4.4 Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Nullfolge, mit

$$(i) \quad p_n \begin{cases} > 0, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ < 0, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}, \quad (ii) \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_{2k} \text{ divergent und } \sum_{k=1}^{\infty} p_{2k-1} \text{ divergent.}$$

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ eine Abbildung $\varphi_x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ derart existiert, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{\varphi_x(k)} = x.$$

Hinweis:
Beginnen Sie mit einer iterativen Definition von φ_x für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$, d.h., definieren Sie $\varphi_x(1)$ und darauf aufbauend $\varphi_x(2)$, $\varphi_x(3)$, usw. Zeigen Sie anschließend, dass für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ derart existiert, dass $\left|\sum_{k=1}^{m} p_{\varphi_x(k)} - x\right| < \varepsilon$ und zeigen Sie danach per Induktion, dass die entsprechende Abschätzung für alle $q > m$ gilt.

Abgabe bis Donnerstag 24. November 14.00 Uhr in die entsprechend gekennzeichneten Briefkästen auf F4.