Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Patrick Kurth

24. November 2011

Analysis I

5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 Sei (X, d) ein metrischer Raum.
Weiter seien $M \subseteq X$, $M^c := \{x \in X \mid x \notin M\}$ und $\mathring{M}$ die Menge der inneren Punkte von M. Zeigen Sie:

(i) $\overline{M} = \{x \in X \mid \forall\, \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset\}$.

(ii) $\overline{M} \cap \overline{M^c} = \{x \in X \mid x \text{ ist Randpunkt von } M\}$.

(iii) $\left(\mathring{M}\right)^c = \overline{M^c}$.

Aufgabe 5.2 Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $A, B \subseteq X$ kompakte Teilmengen von X. Zeigen Sie

$$A \cup B \subseteq X \text{ ist kompakt.}$$

Aufgabe 5.3 Seien (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : X \to X$ eine Abbildung. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die n-te Iterierte $T^{(n)}$ von T durch

$$T^{(1)}(x) := T(x), \quad T^{(n+1)}(x) := T\left(T^{(n)}(x)\right), \quad x \in X.$$

(i) Für ein $m \in \mathbb{N}$ sei die Abbildung $T^{(m)}$ kontrahierend. Zeigen Sie, dass T genau einen Fixpunkt besitzt.

(ii) Wenn für ein $m \in \mathbb{N}$ die Abbildung $T^{(m)}$ kontrahierend ist, muss dann bereits die Abbildung T kontrahierend sein?

Aufgabe 5.4 Sei ℓ^∞ die Menge aller beschränkten reellen Folgen. Für $x, y \in \ell^\infty$ sei

$$d(x, y) := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|,$$

wobei $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Zeigen Sie, dass (ℓ^∞, d) ein vollständiger metrischer Raum ist.

Abgabe bis Donnerstag 1. Dezember 14.00 Uhr in die entsprechend gekennzeichneten Briefkästen auf F4.