Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Patrick Kurth

1. Dezember 2011

Analysis I

6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1 Seien (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in X$. Zeigen Sie, dass die Menge $M := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \subset X$ kompakt ist.

Aufgabe 6.2 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f([a, b]) \subset [a, b]$. Zeigen Sie, dass f mindestens einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 6.3 Sei ℓ^2 die Menge aller reellen Folgen $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\langle x, y\rangle_{\ell^2} := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

für $x, y \in \ell^2$ wohldefiniert ist und dadurch ein Skalarprodukt auf ℓ^2 definiert wird.

Aufgabe 6.4 Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{für } x \in ([0,1] \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\} \\ \frac{1}{q}, & \text{für } x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ teilerfremd.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(i) Für $x_0 \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ist f an der Stelle x_0 nicht stetig.

(ii) Für $x_0 \in ([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$ ist f an der Stelle x_0 stetig.

Abgabe bis Donnerstag 8. Dezember 14.00 Uhr in die entsprechend gekennzeichneten Briefkästen auf F4.