



8. Dezember 2011

## Analysis I

### 7. Übungsblatt

**Aufgabe 7.1** Untersuchen Sie die folgende Funktion  $f \in \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$  auf Stetigkeit.

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

**Aufgabe 7.2** Seien für  $n \in \mathbb{N}$  die Funktionen  $f_n \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  definiert durch

$$f_n(x) := \frac{|x|^n}{1 + |x|^n}.$$

Zeigen Sie:

- (i) Die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert auf  $\mathbb{R}$  nicht gleichmäßig.
- (ii) Für jede feste Zahl  $q > 1$  konvergiert die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig auf den Mengen

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq q \right\} \text{ und } \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq \frac{1}{q} \right\}.$$

Hinweis: Untersuchen Sie die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zunächst auf punktweise Konvergenz.

**Aufgabe 7.3** Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz und geben Sie ggf. die Grenzfunktion an.

(i)  $f_n(x) := \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2},$

(ii)  $f_n(x) := x^2 \sum_{k=0}^{n-1} (1 + x^2)^{-k}.$

**Aufgabe 7.4** Es seien  $\alpha, C \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha > 0$  und  $C \geq 0$ . Weiter seien  $S \subset \mathbb{R}$  und  $f \in \mathcal{F}(S, \mathbb{R})$  mit

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \quad x, y \in S.$$

- (i) Zeigen Sie, dass  $f$  gleichmäßig stetig ist.
- (ii) Sei  $S$  beschränkt. Zeigen Sie, dass  $f$  beschränkt ist.
- (iii) Seien  $S = [0, 1]$ ,  $f(0) = 0$  und  $\alpha > 1$ . Zeigen Sie, dass  $f$  konstant ist.

Hinweis: Wählen Sie  $k > 0$  beliebig und zeigen Sie, dass ein  $x_k > 0$  derart existiert, dass  $|f(x)| \leq k|x|$  für alle  $x \in [0, x_k]$ . Betrachten Sie anschließend  $f$  auf  $I_n := [(n-1)x_k, nx_k] \cap S$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

Abgabe bis Donnerstag 15. Dezember 14.00 Uhr in die entsprechend gekennzeichneten Briefkästen auf F4.

Bitte Rückseite beachten  $\curvearrowright$

**Aufgabe 7.5** Malen Sie aus.



Hinweis: Lassen Sie Ihrer Kreativität freien Lauf. Die besten Werke werden von uns prämiert. Abgabeschluss ist Montag 19. Dezember 14.00 Uhr im entsprechend gekennzeichneten Briefkasten auf F4.

**Ankündigung:**

Wir möchten alle Studierenden dazu einladen, am 15. Dezember ab 19.00 Uhr mit uns einen gemütlichen Abend auf dem Konstanzer Weihnachtsmarkt zu verbringen.

Weitere Details unter [www.math.uni-konstanz.de/~kurth](http://www.math.uni-konstanz.de/~kurth).