

8. Dezember 2011

Analysis I

7. Übungsblatt

Aufgabe 7.1 Untersuchen Sie die folgende Funktion $f \in \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$ auf Stetigkeit.

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Aufgabe 7.2 Seien für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $f_n \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definiert durch

$$f_n(x) := \frac{|x|^n}{1 + |x|^n}.$$

Zeigen Sie:

- (i) Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auf \mathbb{R} nicht gleichmäßig.
- (ii) Für jede feste Zahl $q > 1$ konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf den Mengen

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq q \right\} \text{ und } \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq \frac{1}{q} \right\}.$$

Hinweis: Untersuchen Sie die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zunächst auf punktweise Konvergenz.

Aufgabe 7.3 Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz und geben Sie ggf. die Grenzfunktion an.

(i) $f_n(x) := \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2},$

(ii) $f_n(x) := x^2 \sum_{k=0}^{n-1} (1 + x^2)^{-k}.$

Aufgabe 7.4 Es seien $\alpha, C \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$ und $C \geq 0$. Weiter seien $S \subset \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{F}(S, \mathbb{R})$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \quad x, y \in S.$$

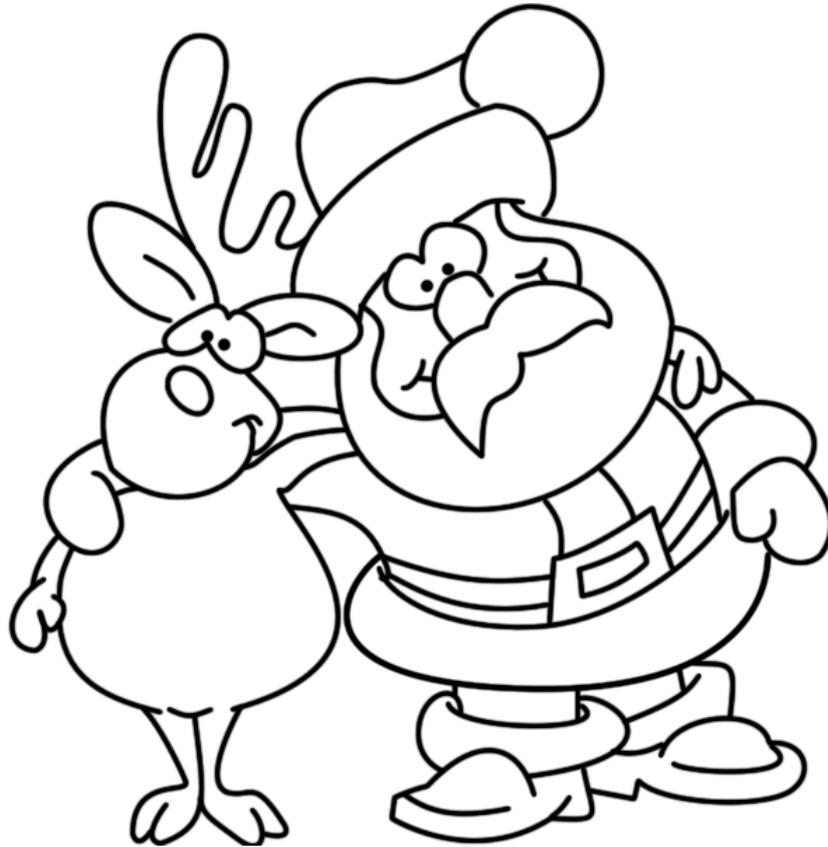
- (i) Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.
- (ii) Sei S beschränkt. Zeigen Sie, dass f beschränkt ist.
- (iii) Seien $S = [0, 1]$, $f(0) = 0$ und $\alpha > 1$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Hinweis: Wählen Sie $k > 0$ beliebig und zeigen Sie, dass ein $x_k > 0$ derart existiert, dass $|f(x)| \leq k|x|$ für alle $x \in [0, x_k]$. Betrachten Sie anschließend f auf $I_n := [(n-1)x_k, nx_k] \cap S$ für $n \in \mathbb{N}$.

Abgabe bis Donnerstag 15. Dezember 14.00 Uhr in die entsprechend gekennzeichneten Briefkästen auf F4.

Bitte Rückseite beachten \curvearrowright

Aufgabe 7.5 Malen Sie aus.



Hinweis: Lassen Sie Ihrer Kreativität freien Lauf. Die besten Werke werden von uns prämiert. Abgabeschluss ist Montag 19. Dezember 14.00 Uhr im entsprechend gekennzeichneten Briefkasten auf F4.

Ankündigung:

Wir möchten alle Studierenden dazu einladen, am 15. Dezember ab 19.00 Uhr mit uns einen gemütlichen Abend auf dem Konstanzer Weihnachtsmarkt zu verbringen.

Weitere Details unter www.math.uni-konstanz.de/~kurth.