Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Patrick Kurth

22. Dezember 2011

Analysis I

9. Übungsblatt

Aufgabe 9.1 Bestimmen Sie die Definitionsbereiche und die Stammfunktionen folgender Funktionen.

(i) $x \mapsto 43\tan(x)$, (ii) $x \mapsto 10e^x x^2$,

(iii) $x \mapsto \frac{x^2+1}{x^4-x^2}$, (iv) $x \mapsto \frac{37}{x+x\ln(x)}$.

Aufgabe 9.2 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-xe^{\frac{x}{2}}}{x^2}$, (ii) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\ln(1+\sqrt{x^2+1})-\ln x\right)$,

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x(1-\cos x)}$, (iv) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan(2x)}$.

Aufgabe 9.3 Seien $f \in \mathcal{F}((-1,1),\mathbb{R})$ differenzierbar mit $f(0)=0$ und $g \in \mathcal{F}((-1,1),\mathbb{R})$ definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

(i) g ist stetig in $(-1,1)$.

(ii) Existiert $f''(0)$, so ist g differenzierbar in $(-1,1)$.

(iii) Existiert f'' in $(-1,1)$ und ist f'' stetig in $x=0$, so ist g stetig differenzierbar in $(-1,1)$.

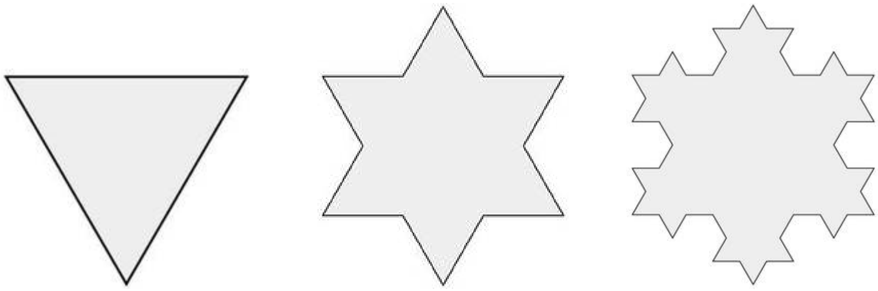
Aufgabe 9.4 Beschreiben Sie einem Kreis ein gleichschenkliges Dreieck mit maximalen Flächeninhalt ein.

Abgabe bis Donnerstag 12. Januar 14.00 Uhr in die entsprechend gekennzeichneten Briefkästen auf F4.

Bitte Rückseite beachten ↷

Freiwillige Zusatzaufgabe (Koch-Kurve) Sei D_0 ein gleichseitiges Dreieck. Ausgehend davon konstruiert man eine Menge D_1, indem man jede Kanten von D_0 drittelt auf und die mittleren Streckabschnitte jeweils ein gleichseitiges Dreieck setzt (vgl. Skizze). Nach diesem Prinzip konstruiert man iterativ eine Folge von Mengen $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h., wenn D_n für ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben ist, so gelangt man zu D_{n+1}, indem man jede Kante von D_n drittelt und auf den mittleren Kantenabschnitten jeweils ein gleichseitiges Dreieck setzt. Damit definiert man

$$D_\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n.$$



D_0 D_1 D_2

(i) Berechnen Sie den Flächeninhalt von D_∞.

(ii) Zeigen Sie, dass der Rand von D_∞ unbeschränkt ist, d.h. zeigen Sie, dass $|\partial D_n| \to \infty$ für $n \to \infty$, wobei $|\partial D_n|$ die Summe der Kantenlängen von D_n ist.

Wir wünschen Ihnen eine frohe Weihnacht und viel Erfolg im neuen Jahr!