Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Stefan Volkwein
Patrick Kurth

02.11.2009

Analysis III

2. Übungsblatt

1. *(Existenz von Lösungen)*

Betrachten Sie folgendes AWP

$$y'(t) = t^2 + (y(t))^2, \quad y(0) = y_0 \quad (\mathit{Riccati-Gleichung}).$$

a) Gibt es zu jedem Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige maximale Lösung?

b) Gibt es Anfangswerte derart, dass die zugehörige Lösung global definiert ist?

c) Wie verhalten sich die Lösungen am Rand ihres Existenzintervalls?

Hinweis: Machen Sie eine Fallunterscheidung $y_0 = 0$, $y_0 \neq 0$ und konstruieren Sie ein „minorantes" AWP.

2. *(eine Eindeutigkeitsbedingung)*

Sei $T > 0$ und sei $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit

$$t \cdot |f(t, x) - f(t, y)| \leq |x - y|$$

für alle $t \in [0, T]$ und $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Seien $u, v \in C^1([0, T], \mathbb{R})$ mit $u'(t) = f(t, u(t))$ und $v'(t) = f(t, v(t))$ für alle $t \in [0, T]$ und sei $u(0) = v(0)$. Zeigen Sie, dass die Funktion $D : [0, T] \to \mathbb{R}$ mit

$$D(t) = \begin{cases} \frac{|u(t)-v(t)|}{t}, & t \in (0, T] \\ 0, & t = 0 \end{cases} .$$

stetig ist und dass $t \cdot D(t) \leq \int_0^t D(\tau) d\tau$ gilt für alle $t \in [0, T]$.

Hinweis: Um die Stetigkeit in 0 zu zeigen, wenden Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf die Funktion D an.

b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit a), dass es höchstens ein $u \in C^1([0, T], \mathbb{R})$ gibt, mit $u(0) = a$ und $u'(t) = f(t, u(t))$ für alle $t \in [0, T]$.

Hinweis: Was wissen Sie über stetige Funktionen auf kompakten Mengen? Verwenden Sie die Abschätzung aus Teil a) um einen Widerspruch zu erzeugen.

3. *(spezielle Lösungsmethoden)*

Lösen Sie folgende AWPs. Geben Sie jeweils das maximale Existenzintervall an.

a) $y'(t) = sin(y(t)), \quad y(0) = 1.$ Was passiert, wenn $y(0) = \pi$?

b) $y'(t) = t^2 + 2ty(t) + (y(t))^2, \quad y(0) = 0.$

c) $y'(t) = \left(\frac{y(t)}{t}\right)^2 + \frac{y(t)}{t}, \quad y(1) = 1.$

Hinweis: Um volle Punktzahl zu erreichen, müssen die Lösungsmethoden mit aufgeführt sein. Nur Lösung „erraten" genügt nicht;-)

Abgabe bis Montag 9.November 10.00 Uhr in die Briefkästen auf F4.