Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Stefan Volkwein
Patrick Kurth

23.11.2009

# Analysis III

5. Übungsblatt

**1.** *(lineare DGls höherer Ordnung)*

Betrachten Sie eine lineare DGl der Form

$$x^{(k)}(t) + a_1 x^{(k-1)}(t) + \ldots + a_k x(t) = 0,$$

$a_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, k$.
Mit $y(t) := \big(x(t), x'(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)\big)^t$ sei $y'(t) = Ay(t)$ die äquivalente Gleichung erster Ordnung, mit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Sei $\chi(T) = det(T \cdot I_n - A)$ das charakteristische Polynom von $A$.
Zeigen Sie, dass

$$\chi(T) = T^k + a_1 T^{k-1} + \ldots + a_{k-1} T + a_k.$$

**2.** *(lineare DGls)*

Zeigen Sie, dass es eine periodische Lösung $u_0$ der DGl

$$u'''(t) + 3u''(t) + 4u'(t) + 2u(t) = 20cos(t)$$

derart gibt, dass jede weitere Lösung $u$ dieser DGl gegen $u_0$ konvergiert.
*Hinweis: Bestimmen Sie eine allgemeine Lösung der DGl*

**3.** *(Stabilität)*

Betrachten Sie die lineare DGl $y' = Ay$ für unten stehende Matrizen $A$ und skizzieren Sie jeweils den Fluss.
Welcher Zusammhang lässt sich anhand der Skizzen zwischen den Eigenwerten von $A$ und der Differenz $|y(t) - u_0(t)|$ für $t \to \infty$, wobei $u_0 \equiv 0$ die triviale Lösung ist, erkennen?

**a)** $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

**d)** $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ **e)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **f)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

*Hinweis: Skizzieren Sie die Verläufe der Orbits mit Hilfe einer allgemeinen Lösungsdarstellung. Umständliche Rechnungen oder exakte Zeichnungen sind nicht nötig.*

Abgabe bis Montag 30.November **12.00 Uhr** in die Briefkästen auf F4.