Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Stefan Volkwein
Patrick Kurth

14.12.2009

Analysis III

8. Übungsblatt

1. Übung zur Maß- und Integrationstheorie

1. *(Integralsatz von Gauß)*

a) Für eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichne $|M|_n$ den n-dimensionalen Inhalt von M (vgl. Definitonen aus A2).
Zeigen Sie unter Verwendung des Gauß'schen Integralsatzes, dass für $B(0,r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ $(r > 0)$ gilt

$$|B(0,r)|_n = \frac{r}{n} |\partial B(0,r)|_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Berechnen Sie damit den Inhalt der Oberfläche einer Kugel in $\mathbb{R}^3$ mit Radius $r > 0$.
Hinweis: Berechnen Sie die Integrale mit Methoden aus den A1/2-Vorlesungen.

b) Betrachten Sie einen Kegel $K \subseteq \mathbb{R}^3$ mit Grundfläche
$G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, \sqrt{x^2+y^2} < R\right\}$
und Spitze in $(0,0,h)^t \in \mathbb{R}^3$ für $R, h > 0$.
Sei $K_S = \left\{(x,y,z)^t \in K : 0 < z < \frac{h}{2}\right\}$ ein Kegelstumpf.
Sei

$$F(x,y,z) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ xyz \end{pmatrix}$$

ein Vektorfeld in $\mathbb{R}^3$.
Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes folgendes Integral

$$\int_{K_S} divF.$$

2. *(σ-Algebra und andere Mengensysteme)*

a) Sei X eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$.
Zeigen Sie, dass

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap \{\mathcal{A} \supseteq \mathcal{E} : \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra über } X\}$$

die bezüglich Inklusion kleinste σ-Algebra ist, die $\mathcal{E}$ enthält.
Hinweis: Zeigen Sie auch, dass $\sigma(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra ist.

b) Sei X eine Menge. Zeigen Sie:
Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist genau dann ein Dynkin-System, wenn gilt:

i) $X \in \mathcal{A}$,

ii) für $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq B$ gilt $B \setminus A \in \mathcal{A}$,

iii) für $A_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ gilt $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

c) Sei X eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem. Sei $A \in \mathcal{E}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{D}_A := \{B \in \mathcal{P}(X) : A \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{E})\}$$

ein Dynkin-System ist, wobei $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ das bezüglich Inklusion kleinste Dynkin-System bezeichne, dass $\mathcal{E}$ enthält.

3. *(Maß)*

a) Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum, mit $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Sei $x \in X$. Zeigen Sie, dass folgende Abbildung ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$ definiert

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

b) Sei $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \text{ oder } A^c \text{ endlich}\}$ und

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ endlich}, \\ 1, & \text{falls } A^c \text{ endlich}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ keine σ-Algebra ist und μ nicht σ-additiv auf $\mathcal{A}$ ist.

c) Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum mit $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ und

$$\zeta(A) = \begin{cases} |A|, & \text{falls } A \text{ endlich}, \\ \infty, & \text{falls } A \text{ unendlich}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass ζ ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$ ist, welches genau dann σ-endlich ist, falls X abzählbar ist.

Abgabe bis Montag 21. Dezember **12.00 Uhr** in die Briefkästen auf F4.