Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Stefan Volkwein
Patrick Kurth

11.01.2010

Analysis III

9. Übungsblatt

2. Übung zur Maß- und Integrationstheorie

1. *(Mengensysteme)*

Sei $\mathbb{A}_n$ der Ring aller endlichen Vereinigungen disjunkter halboffener Intervalle aus $\mathbb{R}^n$ und $\lambda : \mathbb{A}_n \to [0, \infty)$ die kanonische Fortsetzung des elementargeometrischen Inhalts (vgl. Beispiel 1.8 aus der Vorlesung). Zu $M \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt sei

$$|M|_i := sup\,\{\lambda(S) : S \in \mathbb{A}_n, S \subseteq M\}$$

der „innere Inhalt" von M und

$$|M|_a := inf\,\{\lambda(S) : S \in \mathbb{A}_n, M \subseteq S\}$$

der „äußere Inhalt" von M, wobei $sup\emptyset := 0$.
M heißt „Jordan-messbar", falls $|M|_i = |M|_a$.
Sei $\mathscr{A}$ die Menge der Jordan-messbaren Mengen in $\mathbb{R}^n$ und $\lambda(M) := |M|_a$ eine Abbildung auf $\mathscr{A}$.
Zeigen Sie, dass $\mathscr{A}$ ein Ring und λ ein σ-additiver, σ-endlicher Inhalt auf $\mathscr{A}$ ist.
Hinweis: Sie dürfen voraussetzen, dass für eine beschränkte Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt, dass $|\partial M|_a = |\bar{M}|_a - |\mathring{M}|_i$.

2. *(Borel-Algebra)*

Zeigen Sie, dass folgende Mengensysteme die Borel-Algebra $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ erzeugen
$\mathcal{E}_1 := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}^n\}$,
$\mathcal{E}_2 := \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}^n\}$,
$\mathcal{E}_3 := \{(-\infty_n, b) : b \in \mathbb{R}^n\}$, $\infty_n := (\infty, \ldots, \infty)^t$,
$\mathcal{E}_4 := \{(a, \infty_n) : a \in \mathbb{R}^n\}$,
$\mathcal{E}_5 := \{M \subseteq \mathbb{R}^n : M \text{ ist abgeschlossen}\}$,
$\mathcal{E}_6 := \{M \subseteq \mathbb{R}^n : M \text{ ist kompakt}\}$.
Hinweis: Nutzen Sie aus, dass für zwei Mengensysteme $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathcal{A}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_2)$ und $\mathcal{A}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1)$ $\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2)$ gilt.

3. *(Neujahrsaufgabe)*

Eine Zahl $x \in [0,1]$ nennen wir eine „Neujahrzahl", wenn in ihrer Dezimaldarstellung irgendwo die Ziffernfolge 2010 auftaucht. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{J}$ der Neujahrzahlen eine Borel-Menge ist.

Fortsetzung folgt...

Abgabe bis Montag 18. Januar **12.00 Uhr** in die Briefkästen auf F4.