Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Stefan Volkwein
Patrick Kurth

18.01.2010

Analysis III

10. Übungsblatt

3. Übung zur Maß- und Integrationstheorie

1. *(Neujahrsaufgabe-Fortsetzung)*

Betrachten Sie nochmal die Menge $\mathcal{J}$ der „Neujahrzahlen" vom 9. Übungsblatt. Zeigen Sie

a) $[0,1] \setminus \mathcal{J}$ ist eine Lebesgue-Nullmenge.
Hinweis: Betrachten Sie die Neujahrzahlen zur Basis 10^{-4} *und arbeiten Sie mit einer günstigen Teilmenge von* $\mathcal{J}$.

b) Die Mengen $[0,1] \setminus \mathcal{J}$ und $\mathcal{J}$ sind jeweils überabzählbar.

2. *(messbare Abbildungen)*

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion.
Zeigen Sie, dass f messbar ist.

b) Sei $(X, \mathscr{A})$ ein Messraum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, für die $|f|$ $\mathscr{A}$-messbar ist. Folgt daraus, dass f $\mathscr{A}$-messbar ist?
Hinweis: Suchen Sie in der Literatur nach einer nicht-Lebesgue-messbaren Menge aus $\mathbb{R}$.

3. *(Lebesgue-Nullmenge)*

Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und $N \subseteq \mathbb{R}$ eine Lebesgue-Nullmenge.
Zeigen Sie, dass auch $f(N)$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.
Gilt dies auch, wenn f nicht Lipschitz-stetig ist?

Abgabe bis Montag 25. Januar **12.00 Uhr** in die Briefkästen auf F4.