Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Stefan Volkwein
Dipl.-math. Patrick Kurth

3. Februar 2010

Analysis III

Probeklausur

Teil 1 - gewöhnliche Differentialgleichungen

Matrikelnummer

Name

eingeschriebenes Studienfach

Hinweise:

Bitte verwenden Sie zur Bearbeitung einer neuen Aufgabe immer ein neues Blatt!
Die Aufgabe 3 bearbeiten Sie bitte direkt auf dem Klausurbogen.
Achten Sie darauf, dass auf sämtlichen Blättern, die Sie abgeben, Ihre Matrikelnummer im vorgesehenen Feld eingetragen ist.

Es sind **keine** Hilfsmittel zugelassen!

Bearbeitungszeit: **90 Minuten**

Aufgabe 1 Definieren Sie folgende Begriffe. Achten Sie auf Präzision. Jede korrekte Definition wird mit einem Punkt bewertet, unvollständige oder falsche Definitionen werden mit Null Punkten bewertet.

a) separable Differentialgleichung

b) Ljapunov-Funktion

2 Punkte

Aufgabe 2 Was besagt das Lemma von Gronwall? Achten Sie auf Präzision.

2 Punkte

Matrikelnummer	

Aufgabe 3 Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben. Einige Fragen beantworten Sie bitte durch richtiges Ankreuzen, was Sie anschließend **kurz** begründen sollen. Falsch beantwortete Fragen und unzureichende oder falsche Begründungen werden mit Null Punkten bewertet.

a) Lineare Anfangswertprobleme der Form

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \quad t \in J \subseteq \mathbb{R} \text{ Intervall}, \quad y(t_0) = y_0 \in \mathbb{C}^n$$

mit $A \in C(J, \mathbb{C}^{n \times n})$, $b \in C(J, \mathbb{C}^n)$, $t_0 \in J$ sind eindeutig lösbar.

☐ Ja
☐ Nein

Begründung:

---

2 Punkte

b) Wie kann man vorgehen, wenn eine DGl der Form

$$f_1(t, y(t)) + f_2(t, y(t)) \cdot y'(t) = 0, \quad f_1, f_2 \in C(G, \mathbb{R}), G \subseteq \mathbb{R}^n \text{ Gebiet},$$

nicht exakt ist?

---

2 Punkte

c) Ist ein lineares Randwertproblem der Form

$$-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = r(x) \quad (x \in [a, b]), \quad y(a) = y(b) = 0,$$

mit $a < b$, $p \in C^1([a, b], \mathbb{C})$, $p(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und $q, r \in C([a, b], \mathbb{C})$ eindeutig lösbar, so gibt es eine Funktion $G : [a, b]^2 \to \mathbb{C}$, so dass für die Lösung

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) r(s) ds.$$

☐ Ja
☐ Nein

Begründung:

---

2 Punkte

Aufgabe 4 Überprüfen Sie folgende AWPs auf eindeutige Lösbarkeit

a) $y'(t) = t^2 + (y(t))^3, y(0) = 0$
b) $y'(t) = a(t)y(t), y(0) = 0, y'(0) = 1 \qquad (t \in \mathbb{R})$
c) $y'(t) = ay(t) + b, y(0) = \pi, \quad a, b \in \mathbb{R}$

4 Punkte

Aufgabe 5 Zeigen Sie mit Hilfe eines Lyapunov-Funktionals, dass die triviale Lösung folgender Gleichung stabil ist

$$y''(t) + \big((y(t))^2 + 1\big)\, y'(t) + y(t) = 0, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

4 Punkte

Aufgabe 6 Stellen Sie ein Fundamentalsystem zu folgender linearer Differentialgleichung auf

$$y'''(t) - 5y''(t) + 8y(t) - 4 = 0 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

4 Punkte

Zusatzaufgabe

Zeigen Sie:
Ein lineares Randwertproblem der Form

$$y'(x) = F(x)y(x) + g(x) \quad (x \in [a, b]), \quad Ay(a) + By(b) = c,$$

mit $a < b$, $F \in C([a, b], \mathbb{C}^{n \times n})$, $g \in C([a, b], \mathbb{C}^n)$, $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $c \in \mathbb{C}^n$ ist genau dann für beliebige g und c eindeutig lösbar, wenn das zugehörige homogene RWP zu $g \equiv 0$ und $c = 0$ eindeutig lösbar ist.

4 Punkte

Gesamt 22 Punkte

Viel Erfolg!