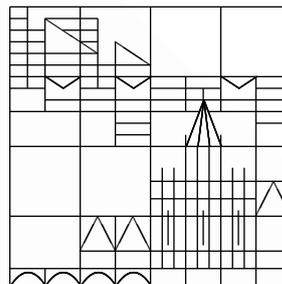


Universität Konstanz  
Fachbereich Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Stefan Volkwein  
Dipl.-math. Patrick Kurth

3. Februar 2010



---

## Analysis III

Probeklausur

**Teil 2 - Maß- und Integrationstheorie**

---

Matrikelnummer

Name

eingeschriebenes Studienfach

**Hinweise:**

Bitte verwenden Sie zur Bearbeitung einer neuen Aufgabe immer ein neues Blatt!

Die Aufgabe 3 bearbeiten Sie bitte direkt auf dem Klausurbogen.

Achten Sie darauf, dass auf sämtlichen Blättern, die Sie abgeben, Ihre Matrikelnummer im vorgesehenen Feld eingetragen ist.

Es sind **keine** Hilfsmittel zugelassen!

Bearbeitungszeit: **90 Minuten**

**Aufgabe 1** Definieren Sie folgende Begriffe. Achten Sie auf Präzision. Jede korrekte Definition wird mit einem Punkt bewertet, unvollständige oder falsche Definitionen werden mit Null Punkten bewertet.

- a) Maß
- b) elementargeometrischer Inhalt

2 Punkte

**Aufgabe 2** Was besagt der Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz?

Achten Sie auf Präzision.

2 Punkte

**Aufgabe 3** Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben. Einige Fragen beantworten Sie bitte durch richtiges Ankreuzen, was Sie anschließend **kurz** begründen sollen. Falsch beantwortete Fragen und unzureichende oder falsche Begründungen werden mit Null Punkten bewertet.

- a) Geben Sie eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  auf  $\mathbb{R}$  an, so dass jede Abbildung  $f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  messbar ist.

---

---

2 Punkte

- b) Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Ist jede Stufenfunktion  $s : X \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{A}$ -messbar?

- Ja  
 Nein

Begründung:

---

---

2 Punkte

- c) Gibt es Lebesgue-integrierbare Funktionen, die nicht Riemann-integrierbar sind?

- Ja  
 Nein

Begründung:

---

---

2 Punkte

**Aufgabe 4** Sei eine Abbildung  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{3}], \\ 3, & x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ 2, & x \in (\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Geben Sie die grösste (d.h. bzgl. Inklusion kleinste)  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  auf  $[0, 1]$  an, so dass  $f$   $\mathcal{A}$ -messbar ist.

4 Punkte

**Aufgabe 5** Betrachten Sie folgendes Mengensystem auf  $\mathbb{R}$

$$\mathcal{E} := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

und zeigen Sie, dass  $\mathcal{E}$  die Borelsche  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}$  erzeugt.

4 Punkte

**Aufgabe 6** Seien  $(X, \mathcal{A}, \nu)$  ein Maßraum mit  $\nu(X) < \infty$ ,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^1(X)$  und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Es gelte  $f_n \rightarrow f$  für  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig auf  $X$ .  
Zeigen Sie:  $f \in L^1(X)$ .

4 Punkte

### Zusatzaufgabe

Seien für  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x \in (0, 1)$   $f_k(x) := k^2 \chi_{(0, \frac{1}{k})}(x)$  und  $f : (0, 1) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , definiert durch  $f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ . Prüfen Sie nach, ob

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 f_k d\lambda = \int_0^1 f d\lambda.$$

Warum kann hier der Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz nicht angewendet werden?

4 Punkte

**Gesamt 22 Punkte**

**Viel Erfolg!**