Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Stefan Volkwein
Dipl.-math. Patrick Kurth

3. Februar 2010

Analysis III

Probeklausur

Teil 2 - Maß- und Integrationstheorie

Matrikelnummer

Name

eingeschriebenes Studienfach

Hinweise:

Bitte verwenden Sie zur Bearbeitung einer neuen Aufgabe immer ein neues Blatt!
Die Aufgabe 3 bearbeiten Sie bitte direkt auf dem Klausurbogen.
Achten Sie darauf, dass auf sämtlichen Blättern, die Sie abgeben, Ihre Matrikelnummer im vorgesehenen Feld eingetragen ist.

Es sind **keine** Hilfsmittel zugelassen!

Bearbeitungszeit: **90 Minuten**

Aufgabe 1 Definieren Sie folgende Begriffe. Achten Sie auf Präzision. Jede korrekte Definition wird mit einem Punkt bewertet, unvollständige oder falsche Definitionen werden mit Null Punkten bewertet.

a) Maß

b) elementargeometrischer Inhalt

2 Punkte

Aufgabe 2 Was besagt der Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz? Achten Sie auf Präzision.

2 Punkte

Matrikelnummer

Aufgabe 3 Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben. Einige Fragen beantworten Sie bitte durch richtiges Ankreuzen, was Sie anschließend **kurz** begründen sollen. Falsch beantwortete Fragen und unzureichende oder falsche Begründungen werden mit Null Punkten bewertet.

a) Geben Sie eine σ-Algebra $\mathscr{A}$ auf $\mathbb{R}$ an, so dass jede Abbildung $f : (\mathbb{R}, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ messbar ist.

2 Punkte

b) Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Ist jede Stufenfunktion $s : X \to \mathbb{R}$ $\mathscr{A}$-messbar?

☐ Ja
☐ Nein

Begründung:

2 Punkte

c) Gibt es Lebesgue-integrierbare Funktionen, die nicht Riemann-integrierbar sind?

☐ Ja
☐ Nein

Begründung:

2 Punkte

Aufgabe 4 Sei eine Abbildung $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{3}], \\ 3, & x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ 2, & x \in (\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Geben Sie die gröbste (d.h. bzgl. Inklusion kleinste) σ-Algebra $\mathscr{A}$ auf $[0,1]$ an, so dass f $\mathscr{A}$-messbar ist.

4 Punkte

Aufgabe 5 Betrachten Sie folgendes Mengensystem auf $\mathbb{R}$

$$\mathcal{E} := \{(a,b] | a, b \in \mathbb{Q}\}$$

und zeigen Sie, dass $\mathcal{E}$ die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ erzeugt.

4 Punkte

Aufgabe 6 Seien $(X, \mathscr{A}, \nu)$ ein Maßraum mit $\nu(X) < \infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(X)$ und $f : X \to \mathbb{R}$. Es gelte $f_n \to f$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf X.
Zeigen Sie: $f \in L^1(X)$.

4 Punkte

Zusatzaufgabe

Seien für $k \in \mathbb{N}$, $x \in (0,1)$ $f_k(x) := k^2 \chi_{(0,\frac{1}{k})}(x)$ und $f : (0,1) \to \bar{\mathbb{R}}$, definiert durch $f(x) := lim_{k\to\infty} f_k(x)$. Prüfen Sie nach, ob

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_0^1 f_k d\lambda = \int\limits_0^1 f d\lambda.$$

Warum kann hier der Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz nicht angewendet werden?

4 Punkte

Gesamt 22 Punkte

Viel Erfolg!