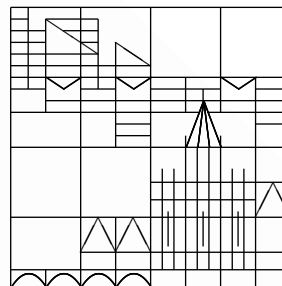


Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Stefan Volkwein
Dipl.-math. Patrick Kurth

3. Februar 2010



Analysis III

Probeklausur

Teil 2 - Maß- und Integrationstheorie

Matrikelnummer

Name

eingeschriebenes Studienfach

Hinweise:

Bitte verwenden Sie zur Bearbeitung einer neuen Aufgabe immer ein neues Blatt!

Die Aufgabe 3 bearbeiten Sie bitte direkt auf dem Klausurbogen.

Achten Sie darauf, dass auf sämtlichen Blättern, die Sie abgeben, Ihre Matrikelnummer im vorgesehenen Feld eingetragen ist.

Es sind **keine** Hilfsmittel zugelassen!

Bearbeitungszeit: **90 Minuten**

Aufgabe 1 Definieren Sie folgende Begriffe. Achten Sie auf Präzision. Jede korrekte Definition wird mit einem Punkt bewertet, unvollständige oder falsche Definitionen werden mit Null Punkten bewertet.

- a) Maß
- b) elementargeometrischer Inhalt

2 Punkte

Aufgabe 2 Was besagt der Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz?

Achten Sie auf Präzision.

2 Punkte

Aufgabe 3 Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben. Einige Fragen beantworten Sie bitte durch richtiges Ankreuzen, was Sie anschließend **kurz** begründen sollen. Falsch beantwortete Fragen und unzureichende oder falsche Begründungen werden mit Null Punkten bewertet.

- a) Geben Sie eine σ -Algebra \mathcal{A} auf \mathbb{R} an, so dass jede Abbildung $f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar ist.

2 Punkte

- b) Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Ist jede Stufenfunktion $s : X \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{A} -messbar?

- Ja
 Nein

Begründung:

2 Punkte

- c) Gibt es Lebesgue-integrierbare Funktionen, die nicht Riemann-integrierbar sind?

- Ja
 Nein

Begründung:

2 Punkte

Aufgabe 4 Sei eine Abbildung $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{3}], \\ 3, & x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ 2, & x \in (\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Geben Sie die grösste (d.h. bzgl. Inklusion kleinste) σ -Algebra \mathcal{A} auf $[0, 1]$ an, so dass f \mathcal{A} -messbar ist.

4 Punkte

Aufgabe 5 Betrachten Sie folgendes Mengensystem auf \mathbb{R}

$$\mathcal{E} := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

und zeigen Sie, dass \mathcal{E} die Borelsche σ -Algebra auf \mathbb{R} erzeugt.

4 Punkte

Aufgabe 6 Seien (X, \mathcal{A}, ν) ein Maßraum mit $\nu(X) < \infty$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^1(X)$ und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Es gelte $f_n \rightarrow f$ für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig auf X . Zeigen Sie: $f \in L^1(X)$.

4 Punkte

Zusatzaufgabe

Seien für $k \in \mathbb{N}$, $x \in (0, 1)$ $f_k(x) := k^2 \chi_{(0, \frac{1}{k})}(x)$ und $f : (0, 1) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, definiert durch $f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$. Prüfen Sie nach, ob

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 f_k d\lambda = \int_0^1 f d\lambda.$$

Warum kann hier der Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz nicht angewendet werden?

4 Punkte

Gesamt 22 Punkte

Viel Erfolg!