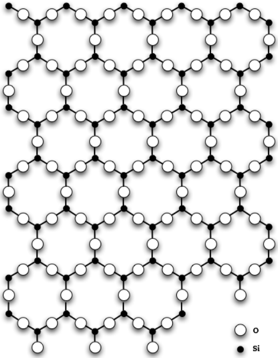
Integro-Differentialgleichungen mit Anwendungen in der Glasrheologie

Patrick Kurth

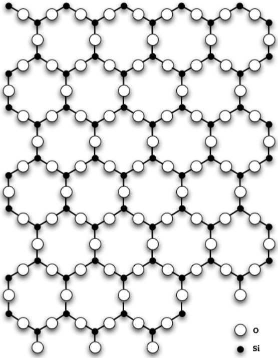
Konstanz, 14.02.2013

Einleitung

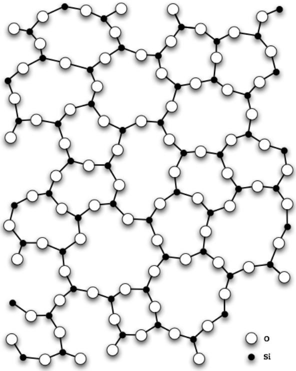
Einleitung



Einleitung



Kristall (Siliciumdioxid)



Glas

Mathematische Modelle:

Mathematische Modelle:

- $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ Korrelationsfunktion der Dichte

Mathematische Modelle:

- $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ Korrelationsfunktion der Dichte
- $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ material-, temparatur- und druckabhängige Funktion, z.B. $F(x) = v_1 x + v_2 x^2$ $(v_1, v_2 \geq 0)$

Mathematische Modelle:

- $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ Korrelationsfunktion der Dichte
- $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ material-, temparatur- und druckabhängige Funktion, z.B. $F(x) = v_1 x + v_2 x^2$ $(v_1, v_2 \geq 0)$
- ϕ erfüllt folgendes AWP einer nichtlinearen Integro-Differentialgleichung (Modenkopplungstheorie):

$$\dot{\phi}(t) + \phi(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad \phi(0) = 1 \qquad (1)$$

Mathematische Modelle:

- $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ Korrelationsfunktion der Dichte
- $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ material-, temparatur- und druckabhängige Funktion, z.B. $F(x) = v_1 x + v_2 x^2$ $(v_1, v_2 \geq 0)$
- ϕ erfüllt folgendes AWP einer nichtlinearen Integro-Differentialgleichung (Modenkopplungstheorie):

$$\dot{\phi}(t) + \phi(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad \phi(0) = 1 \qquad (1)$$

- $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = 0$: Material bleibt (zäh)flüssig
  $\lim_{t\to\infty} \phi(t) \neq 0$: Glasübergang

Mathematische Modelle:

- $$\dot{\phi}(t) + \phi(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad \phi(0) = 1 \tag{1}$$

Mathematische Modelle:

- $$\dot{\phi}(t) + \phi(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad \phi(0) = 1 \tag{1}$$
- Modelle, die Scherraten berücksichtigen:

Mathematische Modelle:

- $\dot{\phi}(t) + \phi(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad \phi(0) = 1 \qquad (1)$
- Modelle, die Scherraten berücksichtigen:

$$\dot{\phi}(t) + \phi(t) + \int_0^t F(\phi(t-s), t-s, s)\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad \phi(0) = 1 \qquad (2)$$

Mathematische Modelle:

- $\dot{\phi}(t) + \phi(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad \phi(0) = 1 \quad (1)$

- Modelle, die Scherraten berücksichtigen:

$$\dot{\phi}(t) + \phi(t) + \int_0^t F(\phi(t-s), t-s, s)\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad \phi(0) = 1 \quad (2)$$

hier: $F : \mathbb{R} \times [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, z.B. $F(x,t,s) = \frac{v_1 x + v_2 x^2}{1+\gamma^2 \sin^2(t)}$, $\gamma \in \mathbb{R}$

Mathematische Modelle:

- $$\dot{\phi}(t) + \phi(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad \phi(0) = 1 \tag{1}$$
- $$\dot{\phi}(t) + \phi(t) + \int_0^t F(\phi(t-s), t-s, s)\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad \phi(0) = 1 \tag{2}$$

Mathematische Modelle:

- $$\dot{\phi}(t) + \phi(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad \phi(0) = 1 \tag{1}$$
- $$\dot{\phi}(t) + \phi(t) + \int_0^t F(\phi(t-s), t-s, s)\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad \phi(0) = 1 \tag{2}$$

(1), (2):
Alle Faktoren in den Faltungsintegralen hängen von den Lösungen der Gleichungen ab

Bisherige Ergebnisse

Bisherige Ergebnisse

W. Götze, L. Sjögren: General Properties of Certain Non-linear Integro-Differential Equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications 195, 230-250 (1995):

Bisherige Ergebnisse

W. Götze, L. Sjögren: General Properties of Certain Non-linear Integro-Differential Equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications 195, 230-250 (1995):

Satz

Für $\delta > 0$ sei $F : [0, 1+\delta) \to \mathbb{R}$ eine absolut monotone Funktion, d.h.

i) $F \in C^\infty([0, 1+\delta), \mathbb{R})$ *und*

ii) $\forall x \in [0, 1+\delta) : F^{(k)}(x) \geq 0 \ (k = 0, 1, 2, \dots)$.

Dann wird das Problem (1) eindeutig durch ein $\phi \in C^\infty([0, \infty), \mathbb{R})$ gelöst, wobei ϕ vollständig monoton ist, d.h.

$$\forall t \in [0, \infty) : (-1)^k \phi^{(k)}(t) \geq 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

W. Götze, L. Sjögren:

Satz

Sei $g \in [0,1)$ *der maximale Fixpunkt der Gleichung*

$$F(g) = \frac{g}{1-g}.$$

Dann gilt für die Lösung ϕ: $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = g$.

Falls zusätzlich $F'(g) < \frac{1}{(1-g)^2}$, *dann gibt es ein* $s_0 > 0$ *derart, dass*

$$\lim_{t\to\infty} e^{s_0 t}(\phi(t) - g) = 0.$$

Offene Fragen/Ziele

Offene Fragen/Ziele

- Erweiterung der Resultate zu Wohlgestelltheit und Asymptotik auf eine größere Klasse von Kernfunktionen,
  insbesondere Resultate zu nicht-monotonen Kernfunktionen sind von Interesse.

Offene Fragen/Ziele

- Erweiterung der Resultate zu Wohlgestelltheit und Asymptotik auf eine größere Klasse von Kernfunktionen,
  insbesondere Resultate zu nicht-monotonen Kernfunktionen sind von Interesse.
- Übertragung der Resultate auf die Probleme (2).

Offene Fragen/Ziele

- Erweiterung der Resultate zu Wohlgestelltheit und Asymptotik auf eine größere Klasse von Kernfunktionen,
  insbesondere Resultate zu nicht-monotonen Kernfunktionen sind von Interesse.
- Übertragung der Resultate auf die Probleme (2).
- Bestimmung der Konvergenzraten im kritischen Fall $F'(g) = \frac{1}{(1-g)^2}$.

Offene Fragen/Ziele

- Erweiterung der Resultate zu Wohlgestelltheit und Asymptotik auf eine größere Klasse von Kernfunktionen,
  insbesondere Resultate zu nicht-monotonen Kernfunktionen sind von Interesse.
- Übertragung der Resultate auf die Probleme (2).
- Bestimmung der Konvergenzraten im kritischen Fall $F'(g) = \frac{1}{(1-g)^2}$.

Im zweiten Teil:

Offene Fragen/Ziele

- Erweiterung der Resultate zu Wohlgestelltheit und Asymptotik auf eine größere Klasse von Kernfunktionen,
  insbesondere Resultate zu nicht-monotonen Kernfunktionen sind von Interesse.
- Übertragung der Resultate auf die Probleme (2).
- Bestimmung der Konvergenzraten im kritischen Fall $F'(g) = \frac{1}{(1-g)^2}$.

Im zweiten Teil:

- Behandlung von gewissen partiellen Integro-Differentialgleichungen, z.B.

$$\partial_t u(t,x) - \triangle u(t,x) + \int_0^t F(u(t-s,x))\partial_s u(s,x)ds = 0, \quad +\text{AB}, +\text{RB}$$

Offene Fragen/Ziele

- **Erweiterung der Resultate zu Wohlgestelltheit und Asymptotik auf eine größere Klasse von Kernfunktionen**,
  insbesondere Resultate zu nicht-monotonen Kernfunktionen sind von Interesse.
- Übertragung der Resultate auf die Probleme (2).
- Bestimmung der Konvergenzraten im kritischen Fall $F'(g) = \frac{1}{(1-g)^2}$.

Im zweiten Teil:

- Behandlung von gewissen partiellen Integro-Differentialgleichungen, z.B.

$$\partial_t u(t,x) - \triangle u(t,x) + \int_0^t F(u(t-s,x))\partial_s u(s,x)ds = 0, \quad +\text{AB}, +\text{RB}$$

Monotone Kernfunktionen

Monotone Kernfunktionen

$$\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad t \in [0,\infty). \tag{1}$$

Monotone Kernfunktionen

$$\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad t \in [0, \infty). \tag{1}$$

Formales Differenzieren von (1) nach t führt zu

Monotone Kernfunktionen

$$\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad t \in [0,\infty). \tag{1}$$

Formales Differenzieren von (1) nach t führt zu

$$\ddot{\phi}(t) = -(1+F(1))\dot{\phi}(t) - \int_0^t F'(\phi(t-s))\dot{\phi}(t-s)\dot{\phi}(s)ds. \tag{3}$$

Monotone Kernfunktionen

$$\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad t \in [0, \infty). \tag{1}$$

Formales Differenzieren von (1) nach t führt zu

$$\ddot{\phi}(t) = -(1 + F(1))\dot{\phi}(t) - \int_0^t F'(\phi(t-s))\dot{\phi}(t-s)\dot{\phi}(s)ds. \tag{3}$$

AB $\phi(0) = 1 \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \dot{\phi}(0) = -1$

Monotone Kernfunktionen

$$\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad t \in [0, \infty). \tag{1}$$

Formales Differenzieren von (1) nach t führt zu

$$\ddot{\phi}(t) = -(1 + F(1))\dot{\phi}(t) - \int_0^t F'(\phi(t-s))\dot{\phi}(t-s)\dot{\phi}(s)ds. \tag{3}$$

AB $\phi(0) = 1 \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \dot{\phi}(0) = -1$
Angenommen, es gibt $t' = \inf\{t > 0 : \dot{\phi}(t) = 0\} > 0$, dann folgt aus (3) unter der Voraussetzung $F'(x) \geq 0$ $(x \in \mathbb{R})$

Monotone Kernfunktionen

$$\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int\limits_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad t \in [0, \infty). \tag{1}$$

Formales Differenzieren von (1) nach t führt zu

$$\ddot{\phi}(t) = -(1 + F(1))\dot{\phi}(t) - \int\limits_0^t F'(\phi(t-s))\dot{\phi}(t-s)\dot{\phi}(s)ds. \tag{3}$$

AB $\phi(0) = 1 \quad \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \quad \dot{\phi}(0) = -1$

Angenommen, es gibt $t' = \inf\{t > 0 : \dot{\phi}(t) = 0\} > 0$, dann folgt aus (3) unter der Voraussetzung $F'(x) \geq 0$ $(x \in \mathbb{R})$

$$\ddot{\phi}(t) \leq -(1 + F(1))\dot{\phi}(t), \quad t \in [0, t'].$$

Monotone Kernfunktionen

$$\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad t \in [0, \infty). \tag{1}$$

Formales Differenzieren von (1) nach t führt zu

$$\ddot{\phi}(t) = -(1 + F(1))\dot{\phi}(t) - \int_0^t F'(\phi(t-s))\dot{\phi}(t-s)\dot{\phi}(s)ds. \tag{3}$$

AB $\phi(0) = 1 \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \dot{\phi}(0) = -1$
Angenommen, es gibt $t' = \inf\{t > 0 : \dot{\phi}(t) = 0\} > 0$, dann folgt aus (3) unter der Voraussetzung $F'(x) \geq 0$ ($x \in \mathbb{R}$)

$$\ddot{\phi}(t) \leq -(1 + F(1))\dot{\phi}(t), \quad t \in [0, t'].$$

Gronwall $\quad \Rightarrow$

Monotone Kernfunktionen

$$\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad t \in [0,\infty). \tag{1}$$

Formales Differenzieren von (1) nach t führt zu

$$\ddot{\phi}(t) = -(1+F(1))\dot{\phi}(t) - \int_0^t F'(\phi(t-s))\dot{\phi}(t-s)\dot{\phi}(s)ds. \tag{3}$$

AB $\phi(0) = 1 \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \dot{\phi}(0) = -1$
Angenommen, es gibt $t' = \inf\{t > 0 : \dot{\phi}(t) = 0\} > 0$, dann folgt aus (3) unter der Voraussetzung $F'(x) \geq 0$ $(x \in \mathbb{R})$

$$\ddot{\phi}(t) \leq -(1+F(1))\dot{\phi}(t), \quad t \in [0,t'].$$

Gronwall $\quad \Rightarrow \quad \dot{\phi}(t) \leq -e^{-(1+F(1))t}$,

Monotone Kernfunktionen

$$\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad t \in [0,\infty). \tag{1}$$

Formales Differenzieren von (1) nach t führt zu

$$\ddot{\phi}(t) = -(1+F(1))\dot{\phi}(t) - \int_0^t F'(\phi(t-s))\dot{\phi}(t-s)\dot{\phi}(s)ds. \tag{3}$$

AB $\phi(0) = 1 \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \dot{\phi}(0) = -1$
Angenommen, es gibt $t' = \inf\{t > 0 : \dot{\phi}(t) = 0\} > 0$, dann folgt aus (3) unter der Voraussetzung $F'(x) \geq 0$ ($x \in \mathbb{R}$)

$$\ddot{\phi}(t) \leq -(1+F(1))\dot{\phi}(t), \quad t \in [0, t'].$$

Gronwall $\quad \Rightarrow \quad \dot{\phi}(t) \leq -e^{-(1+F(1))t}, \quad$ d.h. $\dot{\phi}(t') < 0, \quad$ Widerspruch

Monotone Kernfunktionen

$$\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad t \in [0, \infty). \qquad (1)$$

Formales Differenzieren von (1) nach t führt zu

$$\ddot{\phi}(t) = -(1 + F(1))\dot{\phi}(t) - \int_0^t F'(\phi(t-s))\dot{\phi}(t-s)\dot{\phi}(s)ds. \qquad (3)$$

AB $\phi(0) = 1 \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \dot{\phi}(0) = -1$
Angenommen, es gibt $t' = \inf\{t > 0 : \dot{\phi}(t) = 0\} > 0$, dann folgt aus (3) unter der Voraussetzung $F'(x) \geq 0$ $(x \in \mathbb{R})$

$$\ddot{\phi}(t) \leq -(1 + F(1))\dot{\phi}(t), \quad t \in [0, t'].$$

Gronwall $\quad \Rightarrow \quad \dot{\phi}(t) \leq -e^{-(1+F(1))t}$, d.h. $\dot{\phi}(t') < 0$, Widerspruch

Daraus folgt: ϕ ist streng monoton fallend.

Monotone Kernfunktionen

Basierend auf der Fixpunktgleichung von W. Götze, L. Sjögren, gelten folgende Voraussetzungen an F:

Monotone Kernfunktionen

Basierend auf der Fixpunktgleichung von W. Götze, L. Sjögren, gelten folgende Voraussetzungen an F:

- $\exists x_0 < 1$, mit $F(x_0) = \frac{x_0}{1-x_0} =: G(x_0)$,

Monotone Kernfunktionen

Basierend auf der Fixpunktgleichung von W. Götze, L. Sjögren, gelten folgende Voraussetzungen an F:

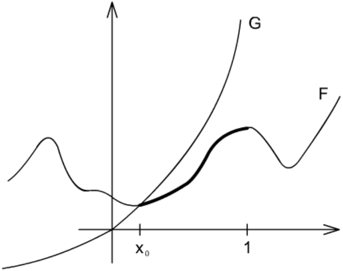
- $\exists x_0 < 1$, mit $F(x_0) = \frac{x_0}{1-x_0} =: G(x_0)$,
- F ist auf $[x_0, 1]$ differenzierbar, monoton wachsend und lokal Lipschitz-stetig.

Monotone Kernfunktionen

- $\exists x_0 < 1$, mit $F(x_0) = \frac{x_0}{1-x_0} =: G(x_0)$,
- F ist auf $[x_0, 1]$ differenzierbar, monoton wachsend und lokal Lipschitz-stetig.

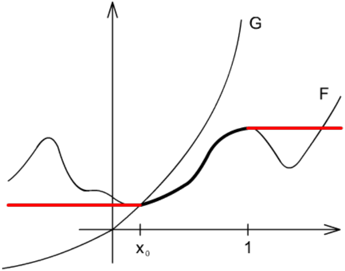
Monotone Kernfunktionen

- $\exists x_0 < 1$, mit $F(x_0) = \frac{x_0}{1-x_0} =: G(x_0)$,
- F ist auf $[x_0, 1]$ differenzierbar, monoton wachsend und lokal Lipschitz-stetig.



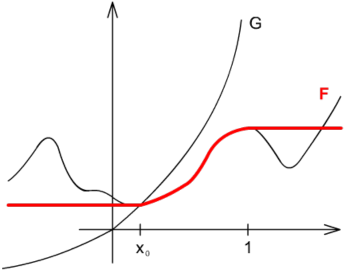
Monotone Kernfunktionen

- $\exists x_0 < 1$, mit $F(x_0) = \frac{x_0}{1-x_0} =: G(x_0)$,
- F ist auf $[x_0, 1]$ differenzierbar, monoton wachsend und lokal Lipschitz-stetig.



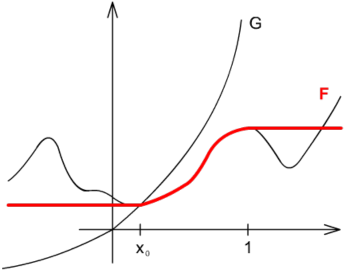
Monotone Kernfunktionen

- $\exists x_0 < 1$, mit $F(x_0) = \frac{x_0}{1-x_0} =: G(x_0)$,
- F ist auf $[x_0, 1]$ differenzierbar, monoton wachsend und lokal Lipschitz-stetig.



Monotone Kernfunktionen

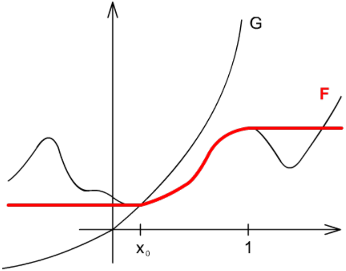
- $\exists x_0 < 1$, mit $F(x_0) = \frac{x_0}{1-x_0} =: G(x_0)$,
- F ist auf $[x_0, 1]$ differenzierbar, monoton wachsend und lokal Lipschitz-stetig.



F ist auf $\mathbb{R}$ beschränkt, monoton wachsend und ohne Einschränkung differenzierbar,

Monotone Kernfunktionen

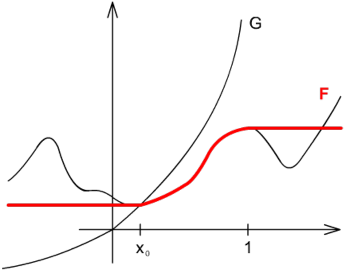
- $\exists x_0 < 1$, mit $F(x_0) = \frac{x_0}{1-x_0} =: G(x_0)$,
- F ist auf $[x_0, 1]$ differenzierbar, monoton wachsend und lokal Lipschitz-stetig.



F ist auf $\mathbb{R}$ beschränkt, monoton wachsend und ohne Einschränkung differenzierbar,
d.h., das Problem (1) zu F besitzt eine eindeutige Lösung $\phi \in C^1([0, \infty), \mathbb{R})$, die streng monoton fallend ist.

Monotone Kernfunktionen

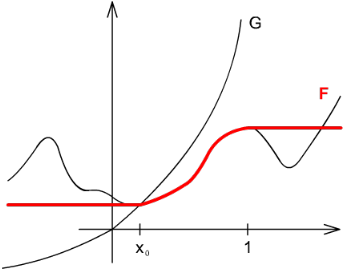
- $\exists x_0 < 1$, mit $F(x_0) = \frac{x_0}{1-x_0} =: G(x_0)$,
- F ist auf $[x_0, 1]$ differenzierbar, monoton wachsend und lokal Lipschitz-stetig.



Weiter gilt aufgrund der Monotonie:
$x_0 \leq \phi(t) \leq 1$ für alle $t \in [0, \infty)$

Monotone Kernfunktionen

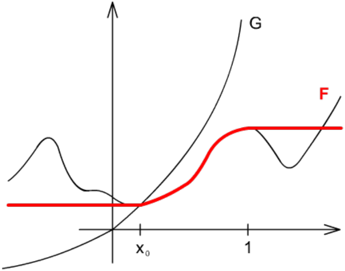
- $\exists x_0 < 1$, mit $F(x_0) = \frac{x_0}{1-x_0} =: G(x_0)$,
- F ist auf $[x_0, 1]$ differenzierbar, monoton wachsend und lokal Lipschitz-stetig.



Weiter gilt aufgrund der Monotonie:
$x_0 \leq \phi(t) \leq 1$ für alle $t \in [0, \infty)$
Da F und F auf $[x_0, 1]$ übereinstimmen, ist ϕ eine Lösung zum ursprünglichen Problem.

Monotone Kernfunktionen

- $\exists x_0 < 1$, mit $F(x_0) = \frac{x_0}{1-x_0} =: G(x_0)$,
- F ist auf $[x_0, 1]$ differenzierbar, monoton wachsend und lokal Lipschitz-stetig.



Weiter gilt aufgrund der Monotonie:
$x_0 \leq \phi(t) \leq 1$ für alle $t \in [0, \infty)$
Da F und F auf $[x_0, 1]$ übereinstimmen, ist ϕ eine Lösung zum ursprünglichen Problem.
Insbesondere ist ϕ konvergent.

Satz

Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *mit*

(i) $\exists x_0 < 1$, *mit* $F(x_0) = \frac{x_0}{1-x_0} =: G(x_0)$,

(ii) F *ist auf* $[x_0, 1]$ *differenzierbar, monoton wachsend und lokal Lipschitz-stetig.*

Satz

Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *mit*

(i) $\exists x_0 < 1$, *mit* $F(x_0) = \frac{x_0}{1-x_0} =: G(x_0)$,

(ii) F *ist auf* $[x_0, 1]$ *differenzierbar, monoton wachsend und lokal Lipschitz-stetig.*

Dann besitzt das Problem (1) zu F *eine eindeutige Lösung* $\phi \in C^1([0, \infty), \mathbb{R})$, *die monoton fallend ist und gegen den maximalen Schnittpunkt* $g \in [x_0, 1)$ *von* F *mit* G *konvergiert.*

Monotone Kernfunktionen: Konvergenzraten

Monotone Kernfunktionen: Konvergenzraten

Zur Erinnerung (W. Götze, L. Sjögren):

Monotone Kernfunktionen: Konvergenzraten

Zur Erinnerung (W. Götze, L. Sjögren):
Falls $F'(g) < \frac{1}{(1-g)^2}$ $(= G'(g))$, dann gibt es ein $s_0 > 0$ derart, dass

$$\lim_{t\to\infty} e^{s_0 t}(\phi(t) - g) = 0.$$

Monotone Kernfunktionen: Konvergenzraten

Zur Erinnerung (W. Götze, L. Sjögren):
Falls $F'(g) < \frac{1}{(1-g)^2}$ $(= G'(g))$, dann gibt es ein $s_0 > 0$ derart, dass

$$\lim_{t\to\infty} e^{s_0 t}(\phi(t) - g) = 0.$$

Kommentare zum Beweis (im Fall $g = 0$):

Monotone Kernfunktionen: Konvergenzraten

Zur Erinnerung (W. Götze, L. Sjögren):
Falls $F'(g) < \frac{1}{(1-g)^2}$ $(= G'(g))$, dann gibt es ein $s_0 > 0$ derart, dass

$$\lim_{t\to\infty} e^{s_0 t}(\phi(t) - g) = 0.$$

Kommentare zum Beweis (im Fall $g = 0$):

- Man zeigt per Induktion: $\forall n \in \mathbb{N} : \int_0^\infty t^n \phi(t) dt < \infty$.

Monotone Kernfunktionen: Konvergenzraten

Zur Erinnerung (W. Götze, L. Sjögren):
Falls $F'(g) < \frac{1}{(1-g)^2}$ $(= G'(g))$, dann gibt es ein $s_0 > 0$ derart, dass

$$\lim_{t\to\infty} e^{s_0 t}(\phi(t) - g) = 0.$$

Kommentare zum Beweis (im Fall $g = 0$):

- Man zeigt per Induktion: $\forall n \in \mathbb{N} : \int\limits_0^\infty t^n \phi(t) dt < \infty$.
- Daraus folgt: $\exists s_0 > 0 : \int\limits_0^\infty e^{s_0 t} \phi(t) dt < \infty$, d.h., $\lim\limits_{t\to\infty} e^{s_0 t}\phi(t) = 0$.

Monotone Kernfunktionen: Konvergenzraten

Zur Erinnerung (W. Götze, L. Sjögren):
Falls $F'(g) < \frac{1}{(1-g)^2}$ $(= G'(g))$, dann gibt es ein $s_0 > 0$ derart, dass

$$\lim_{t\to\infty} e^{s_0 t}(\phi(t) - g) = 0.$$

Kommentare zum Beweis (im Fall $g = 0$):

- Wesentlicher Beweisschritt:

$$\exists \varepsilon \in (0,1), x_0 > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}, x > x_0 : \int_{x_0}^{x} t^n F(\phi(t)) dt \leq (1-\varepsilon) \int_{x_0}^{x} t^n \phi(t) dt.$$

Monotone Kernfunktionen: Konvergenzraten

Zur Erinnerung (W. Götze, L. Sjögren):
Falls $F'(g) < \frac{1}{(1-g)^2}$ $(= G'(g))$, dann gibt es ein $s_0 > 0$ derart, dass

$$\lim_{t\to\infty} e^{s_0 t}(\phi(t) - g) = 0.$$

Kommentare zum Beweis (im Fall $g = 0$):

- Wesentlicher Beweisschritt:

$$\exists \varepsilon \in (0,1), x_0 > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}, x > x_0 : \int_{x_0}^{x} t^n F(\phi(t))dt \leq (1-\varepsilon) \int_{x_0}^{x} t^n \phi(t)dt.$$

Voraussetzung: F ist absolut monoton mit $F'(0) < 1$.

Monotone Kernfunktionen: Konvergenzraten

Zur Erinnerung (W. Götze, L. Sjögren):
Falls $F'(g) < \frac{1}{(1-g)^2}$ $(= G'(g))$, dann gibt es ein $s_0 > 0$ derart, dass

$$\lim_{t\to\infty} e^{s_0 t}(\phi(t) - g) = 0.$$

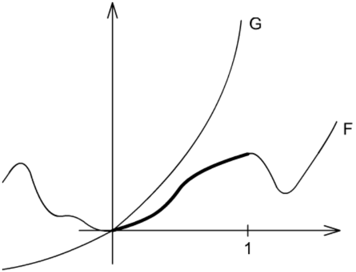
Kommentare zum Beweis (im Fall $g = 0$):

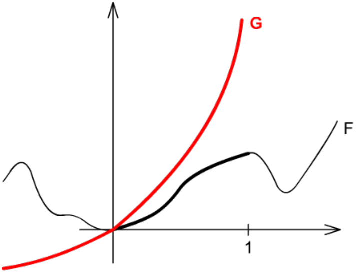
- Wesentlicher Beweisschritt:

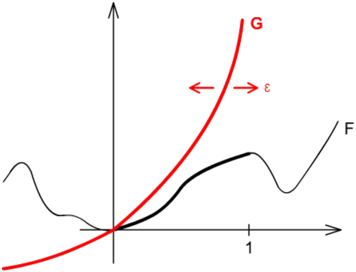
$$\exists \varepsilon \in (0,1), x_0 > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}, x > x_0 : \int_{x_0}^{x} t^n F(\phi(t))dt \leq (1-\varepsilon) \int_{x_0}^{x} t^n \phi(t)dt.$$

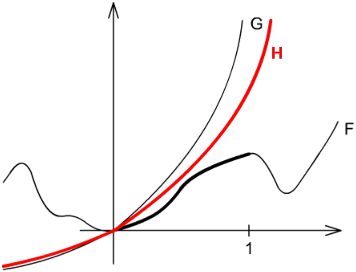
  Voraussetzung: F ist absolut monoton mit $F'(0) < 1$.

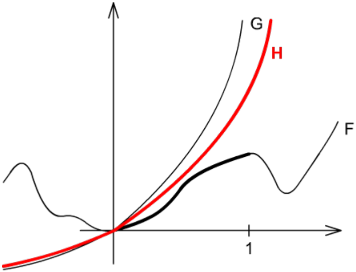
  Idee: Konstruktion einer absolut monotonen Funktion
  $H : [0,1] \to \mathbb{R}$, mit $F(x) \leq H(x) \leq G(x)$ für alle $x \in [0,1)$.


G
F
1


G
F
1


G
ε
F
1


G
H
F
1

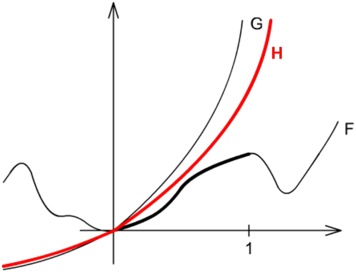


Es gilt dann:

$\exists \varepsilon \in (0,1), x_0 > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}, x > x_0 :$

$$\int_{x_0}^{x} t^n F(\phi(t))dt \leq \int_{x_0}^{x} t^n H(\phi(t))dt$$

$$\overset{\text{Götze,Sjögren}}{\leq} (1-\varepsilon) \int_{x_0}^{x} t^n \phi(t)dt$$



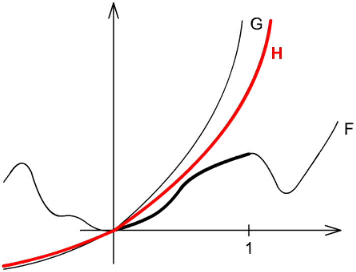
Es gilt dann:

$\exists\varepsilon \in (0,1), x_0 > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}, x > x_0 :$

$$\int_{x_0}^{x} t^n F(\phi(t))dt \leq \int_{x_0}^{x} t^n H(\phi(t))dt \overset{\text{Götze,Sjögren}}{\leq} (1-\varepsilon)\int_{x_0}^{x} t^n \phi(t)dt$$

Benötigen dafür:

$H'(0) < 1$



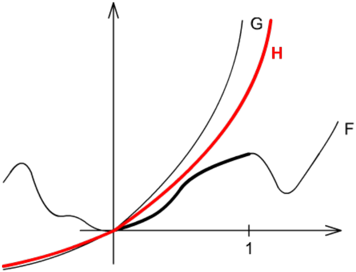
Es gilt dann:

$\exists \varepsilon \in (0,1), x_0 > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}, x > x_0$:

$$\int_{x_0}^{x} t^n F(\phi(t))dt \leq \int_{x_0}^{x} t^n H(\phi(t))dt \overset{\text{Götze,Sjögren}}{\leq} (1-\varepsilon)\int_{x_0}^{x} t^n \phi(t)dt$$

Benötigen dafür:

$H'(0) < 1 \Leftarrow F'(0) < 1$



Es gilt dann:

$\exists \varepsilon \in (0,1), x_0 > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}, x > x_0 :$

$$\int_{x_0}^{x} t^n F(\phi(t))dt \leq \int_{x_0}^{x} t^n H(\phi(t))dt \overset{\text{Götze,Sjögren}}{\leq} (1-\varepsilon) \int_{x_0}^{x} t^n \phi(t)dt$$

Benötigen dafür:

$H'(0) < 1 \Leftarrow F'(0) < 1$

Übertragung auf allgemeinere Grenzwerte $g \neq 0$ möglich.

Satz

Seien $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g < 1$ der maximale Fixpunkt von $F(x) = \frac{x}{1-x}$. Weiter sei F auf $[g, 1]$ stetig differenzierbar und monoton wachsend und es gelte $F'(g) < \frac{1}{(1-g)^2}$.
Dann besitzt das Problem (1) zu F eine eindeutige Lösung $\phi \in C^1([0,\infty),\mathbb{R})$, die monoton fallend ist, mit

$$\exists s_0 > 0 : \lim_{t\to\infty} e^{s_0 t}\,[\phi(t) - g] = 0.$$

Wir betrachten den Fall $g = 0$, $F'(0) = 1$:

Wir betrachten den Fall $g = 0$, $F'(0) = 1$:

$$\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0$$

Wir betrachten den Fall $g = 0$, $F'(0) = 1$:

$$\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0$$

$$\overset{\text{V.d.K.}}{\Rightarrow} \qquad \phi(t) = e^{-t} - e^{-t}\int_0^t e^s \int_0^s F(\phi(s-r))\dot{\phi}(r)drds.$$

Wir betrachten den Fall $g = 0$, $F'(0) = 1$:

$$\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0$$

$$\overset{\text{V.d.K.}}{\Rightarrow} \qquad \phi(t) = e^{-t} - e^{-t}\int_0^t e^s \int_0^s F(\phi(s-r))\dot{\phi}(r)drds.$$

$F(x) \leq x$, partielle Integration, $\dot{\phi} \leq 0$ und Lemma von Gronwall liefern:

$$e^t\phi^2(t)t \leq e^t$$

Wir betrachten den Fall $g = 0$, $F'(0) = 1$:

$$\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0$$

$$\overset{\text{V.d.K.}}{\Rightarrow} \qquad \phi(t) = e^{-t} - e^{-t}\int_0^t e^s \int_0^s F(\phi(s-r))\dot{\phi}(r)drds.$$

$F(x) \leq x$, partielle Integration, $\dot{\phi} \leq 0$ und Lemma von Gronwall liefern:

$$e^t\phi^2(t)t \leq e^t \quad \Rightarrow \quad \phi(t) \leq t^{-\frac{1}{2}}.$$

Wir betrachten den Fall $g = 0$, $F'(0) = 1$:

$$\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0$$

$$\overset{\text{V.d.K.}}{\Rightarrow} \qquad \phi(t) = e^{-t} - e^{-t}\int_0^t e^s \int_0^s F(\phi(s-r))\dot{\phi}(r)drds.$$

$F(x) \leq x$, partielle Integration, $\dot{\phi} \leq 0$ und Lemma von Gronwall liefern:

$$e^t \phi^2(t)t \leq e^t \quad \Rightarrow \quad \phi(t) \leq t^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Konvergenzrate ist unter diesen Voraussetzungen optimal!

Offene Fragen/Ziele

- Erweiterung der Resultate zu Wohlgestelltheit und Asymptotik auf eine größere Klasse von Kernfunktionen, insbesondere Resultate zu nicht-monotonen Kernfunktionen sind von Interesse.
- Übertragung der Resultate auf die Probleme (2).
- Bestimmung der Konvergenzraten im kritischen Fall $F'(g) = \frac{1}{(1-g)^2}$.

Im zweiten Teil:

- Behandlung von gewissen partiellen Integro-Differentialgleichungen, z.B.

$$\partial_t u(t,x) - \triangle u(t,x) + \int_0^t F(u(t-s,x))\partial_s u(s,x)ds = 0, \quad +\mathrm{AB}, +\mathrm{RB}$$

Offene Fragen/Ziele

- Erweiterung der Resultate zu Wohlgestelltheit und Asymptotik auf eine größere Klasse von Kernfunktionen, insbesondere Resultate zu nicht-monotonen Kernfunktionen sind von Interesse.
- Übertragung der Resultate auf die Probleme (2).
- Bestimmung der Konvergenzraten im kritischen Fall $F'(g) = \frac{1}{(1-g)^2}$.

Im zweiten Teil:

- Behandlung von gewissen partiellen Integro-Differentialgleichungen, z.B.

$$\partial_t u(t,x) - \triangle u(t,x) + \int_0^t F(u(t-s,x))\partial_s u(s,x)ds = 0, \quad +\text{AB}, +\text{RB}$$

Offene Fragen/Ziele

- Erweiterung der Resultate zu Wohlgestelltheit und Asymptotik auf eine größere Klasse von Kernfunktionen, insbesondere Resultate zu nicht-monotonen Kernfunktionen sind von Interesse.
- Übertragung der Resultate auf die Probleme (2).
- Bestimmung der Konvergenzraten im kritischen Fall $F'(g) = \frac{1}{(1-g)^2}$.

Im zweiten Teil:

- Behandlung von gewissen partiellen Integro-Differentialgleichungen, z.B.

$$\partial_t u(t,x) - \triangle u(t,x) + \int_0^t F(u(t-s,x))\partial_s u(s,x)ds = 0, \quad +\text{AB}, +\text{RB}$$

Offene Fragen/Ziele

- Erweiterung der Resultate zu Wohlgestelltheit und Asymptotik auf eine größere Klasse von Kernfunktionen, insbesondere **Resultate zu nicht-monotonen Kernfunktionen** sind von Interesse.
- Übertragung der Resultate auf die Probleme (2).
- Bestimmung der Konvergenzraten im kritischen Fall $F'(g) = \frac{1}{(1-g)^2}$.

Im zweiten Teil:

- Behandlung von gewissen partiellen Integro-Differentialgleichungen, z.B.

$$\partial_t u(t,x) - \triangle u(t,x) + \int_0^t F(u(t-s,x))\partial_s u(s,x)ds = 0, \quad +\text{AB}, +\text{RB}$$

Kernfunktionen unter Kleinheitsbedingungen

Kernfunktionen unter Kleinheitsbedingungen

$$\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0.$$

Kernfunktionen unter Kleinheitsbedingungen

Idee: $$\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0.$$

kleine nichtlineare Störung $\uparrow$

Kernfunktionen unter Kleinheitsbedingungen

Idee: $\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0.$

kleine nichtlineare Störung $\uparrow$

Betrachten zunächst lineares Problem:

$$\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int_0^t m(t-s)\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad \phi(0) = 1, \tag{4}$$

wobei $m : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Kernfunktionen unter Kleinheitsbedingungen

Idee: $\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0.$

kleine nichtlineare Störung $\uparrow$

Betrachten zunächst lineares Problem:

$$\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int_0^t m(t-s)\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad \phi(0) = 1, \tag{4}$$

wobei $m : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Fixpunktargumente: Falls m stetig, besitzt das Problem (4) eine eindeutige Lösung $\phi \in C^1([0,\infty), \mathbb{R})$.

Asymptotik des linearen Problems:

$$\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int\limits_0^t m(t-s)\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad \phi(0) = 1, \tag{4}$$

Asymptotik des linearen Problems:

$$\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int_0^t m(t-s)\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad \phi(0) = 1, \tag{4}$$

$$\overset{|m'(t)| \leq ke^{-c_1 t}}{\Longrightarrow} \quad |\dot{\phi}(t)| \leq e^{\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c}t}.$$

Asymptotik des linearen Problems:

$$\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int_0^t m(t-s)\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad \phi(0) = 1, \tag{4}$$

$$\overset{|m'(t)| \leq ke^{-c_1 t}}{\Longrightarrow} \quad |\dot{\phi}(t)| \leq e^{\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c}t}.$$

Exponentielles Abklingen: $c(c_1 - c) \overset{!}{>} k$

Asymptotik des linearen Problems:

$$\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int_0^t m(t-s)\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad \phi(0) = 1, \tag{4}$$

$$\overset{|m'(t)| \leq ke^{-c_1 t}}{\Rightarrow} \quad |\dot{\phi}(t)| \leq e^{\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c}t}.$$

Exponentielles Abklingen: $c(c_1 - c) \overset{!}{>} k$

$$\overset{(4), \lim\limits_{t\to\infty} m(t)=0}{\Rightarrow} \quad |\phi(t)| \leq \frac{-(c_1-c)}{k-c(c_1-c)} e^{\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c}t}.$$

Übertragung auf nichtlineares Problem:

Übertragung auf nichtlineares Problem:

Wir interessieren uns für Lösungen $\phi \in C$, wobei

$$C := \Big\{ f \in C^1([0,\infty),\mathbb{R}) : \\ f(0) = 1, \forall t \in [0,\infty) : |f(t)| \leq \frac{-(c_1 - c)}{k - c(c_1 - c)} e^{\frac{k - c(c_1 - c)}{c_1 - c} t}, |f'(t)| \leq e^{\frac{k - c(c_1 - c)}{c_1 - c} t} \Big\}$$

Übertragung auf nichtlineares Problem:

Wir interessieren uns für Lösungen $\phi \in C$, wobei

$$C := \Big\{ f \in C^1([0,\infty),\mathbb{R}) : \\ f(0) = 1, \forall t \in [0,\infty) : |f(t)| \le \tfrac{-(c_1-c)}{k-c(c_1-c)} e^{\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c}t}, |f'(t)| \le e^{\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c}t} \Big\}$$

Dafür definieren wir

$$T : C \to C, \; v \mapsto Tv, \text{ wobei } Tv \text{ Lösung von (4) zu } m := F \circ v.$$

Übertragung auf nichtlineares Problem:

Wir interessieren uns für Lösungen $\phi \in C$, wobei

$$C := \Big\{ f \in C^1([0,\infty),\mathbb{R}) : \\ f(0)=1, \forall t \in [0,\infty) : |f(t)| \leq \frac{-(c_1-c)}{k-c(c_1-c)} e^{\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c}t}, |f'(t)| \leq e^{\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c}t} \Big\}$$

Dafür definieren wir

$$T : C \to C,\ v \mapsto Tv,\ \text{wobei } Tv \text{ Lösung von (4) zu } m := F \circ v.$$

zur Wohldefiniertheit von T (jetzt: $c = 1 + m(0) = 1 + F(1)$):

Übertragung auf nichtlineares Problem:

Wir interessieren uns für Lösungen $\phi \in C$, wobei

$$C := \Big\{ f \in C^1([0,\infty),\mathbb{R}) : \\ f(0) = 1, \forall t \in [0,\infty) : |f(t)| \leq \tfrac{-(c_1-c)}{k-c(c_1-c)} e^{\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c}t}, |f'(t)| \leq e^{\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c}t} \Big\}$$

Dafür definieren wir

$$T : C \to C,\ v \mapsto Tv,\ \text{wobei } Tv \text{ Lösung von (4) zu } m := F \circ v.$$

zur Wohldefiniertheit von T (jetzt: $c = 1 + m(0) = 1 + F(1)$):

$$|m'(t)| \quad = \quad |F'(v(t))\dot{v}(t)|$$

Übertragung auf nichtlineares Problem:

Wir interessieren uns für Lösungen $\phi \in C$, wobei

$$C := \Big\{ f \in C^1([0,\infty),\mathbb{R}) : \\ f(0) = 1, \forall t \in [0,\infty) : |f(t)| \leq \tfrac{-(c_1-c)}{k-c(c_1-c)} e^{\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c}t}, |f'(t)| \leq e^{\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c}t} \Big\}$$

Dafür definieren wir

$$T : C \to C,\ v \mapsto Tv,\ \text{wobei } Tv \text{ Lösung von (4) zu } m := F \circ v.$$

zur Wohldefiniertheit von T (jetzt: $c = 1 + m(0) = 1 + F(1)$):

$$|m'(t)| \quad = \quad |F'(v(t))\dot{v}(t)| \overset{|F'(x)|\leq v_1|x|^\alpha}{\leq} v_1|v(t)|^\alpha|\dot{v}(t)|$$

Übertragung auf nichtlineares Problem:

Wir interessieren uns für Lösungen $\phi \in C$, wobei

$$C := \Big\{ f \in C^1([0,\infty),\mathbb{R}) : \\ f(0) = 1, \forall t \in [0,\infty) : |f(t)| \leq \frac{-(c_1-c)}{k-c(c_1-c)} e^{\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c}t}, |f'(t)| \leq e^{\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c}t} \Big\}$$

Dafür definieren wir

$$T : C \to C,\ v \mapsto Tv,\ \text{wobei } Tv \text{ Lösung von (4) zu } m := F \circ v.$$

zur Wohldefiniertheit von T (jetzt: $c = 1 + m(0) = 1 + F(1)$):

$$\begin{aligned} |m'(t)| &= |F'(v(t))\dot{v}(t)| \overset{|F'(x)| \leq v_1|x|^\alpha}{\leq} v_1|v(t)|^\alpha|\dot{v}(t)| \\ &\overset{v \in C}{\leq} v_1 \left(\frac{-(c_1-c)}{k-c(c_1-c)}\right)^\alpha e^{(\alpha+1)\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c}t} \end{aligned}$$

Übertragung auf nichtlineares Problem:

Wir interessieren uns für Lösungen $\phi \in C$, wobei

$$C := \Big\{ f \in C^1([0,\infty),\mathbb{R}) : \\ f(0) = 1, \forall t \in [0,\infty) : |f(t)| \leq \tfrac{-(c_1-c)}{k-c(c_1-c)} e^{\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c} t}, |f'(t)| \leq e^{\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c} t} \Big\}$$

Dafür definieren wir

$$T : C \to C,\ v \mapsto Tv,\ \text{wobei } Tv \text{ Lösung von (4) zu } m := F \circ v.$$

zur Wohldefiniertheit von T (jetzt: $c = 1 + m(0) = 1 + F(1)$):

$$\begin{aligned} |m'(t)| &= |F'(v(t))\dot{v}(t)| \overset{|F'(x)| \leq v_1|x|^\alpha}{\leq} v_1|v(t)|^\alpha|\dot{v}(t)| \\ &\overset{v \in C}{\leq} v_1 \left(\frac{-(c_1-c)}{k-c(c_1-c)} \right)^\alpha e^{(\alpha+1)\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c} t} \\ &\overset{!}{\leq} k e^{-c_1 t} \end{aligned}$$

Übertragung auf nichtlineares Problem:

Wir interessieren uns für Lösungen $\phi \in C$, wobei

$$C := \Big\{ f \in C^1([0,\infty),\mathbb{R}) : \\ f(0) = 1, \forall t \in [0,\infty) : |f(t)| \leq \tfrac{-(c_1-c)}{k-c(c_1-c)} e^{\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c}t}, |f'(t)| \leq e^{\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c}t} \Big\}$$

Dafür definieren wir

$$T : C \to C,\ v \mapsto Tv,\ \text{wobei } Tv \text{ Lösung von (4) zu } m := F \circ v.$$

zur Wohldefiniertheit von T (jetzt: $c = 1 + m(0) = 1 + F(1)$):

$$(\alpha+1)\frac{k - c(c_1 - c)}{c_1 - c} \leq -c_1, \quad v_1 \left(\frac{-(c_1 - c)}{k - c(c_1 - c)}\right)^{\alpha} \leq k.$$

Übertragung auf nichtlineares Problem:

Wir interessieren uns für Lösungen $\phi \in C$, wobei

$$C := \Big\{ f \in C^1([0,\infty),\mathbb{R}) : \\ f(0) = 1, \forall t \in [0,\infty) : |f(t)| \le \frac{-(c_1-c)}{k-c(c_1-c)} e^{\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c}t}, |f'(t)| \le e^{\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c}t} \Big\}$$

Dafür definieren wir

$$T : C \to C, \; v \mapsto Tv, \; \text{wobei } Tv \text{ Lösung von (4) zu } m := F \circ v.$$

zur Wohldefiniertheit von T (jetzt: $c = 1 + m(0) = 1 + F(1)$):

$$(\alpha+1)\frac{k - c(c_1 - c)}{c_1 - c} \le -c_1, \quad v_1 \left(\frac{-(c_1 - c)}{k - c(c_1 - c)} \right)^{\alpha} \le k.$$

Falls $F(0) = 0$, folgt:
$|F(x)| \le v_2 |x|^{\beta}$ für gewisse $v_2, \beta > 0$

Übertragung auf nichtlineares Problem:

Wir interessieren uns für Lösungen $\phi \in C$, wobei

$$C := \Big\{ f \in C^1([0,\infty),\mathbb{R}) : \\ f(0) = 1, \forall t \in [0,\infty) : |f(t)| \leq \tfrac{-(c_1-c)}{k-c(c_1-c)} e^{\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c}t}, |f'(t)| \leq e^{\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c}t} \Big\}$$

Dafür definieren wir

$$T : C \to C,\ v \mapsto Tv,\ \text{wobei } Tv \text{ Lösung von (4) zu } m := F \circ v.$$

zur Wohldefiniertheit von T (jetzt: $c = 1 + m(0) = 1 + F(1)$):

$$(\alpha+1)\frac{k - c(c_1 - c)}{c_1 - c} \leq -c_1, \quad v_1 \left(\frac{-(c_1 - c)}{k - c(c_1 - c)} \right)^{\alpha} \leq k.$$

Falls $F(0) = 0$, folgt:
$|F(x)| \leq v_2 |x|^{\beta}$ für gewisse $v_2, \beta > 0 \quad \Rightarrow \quad m(t) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Übertragung auf nichtlineares Problem:

Wir interessieren uns für Lösungen $\phi \in C$, wobei

$$C := \Big\{ f \in C^1([0,\infty),\mathbb{R}) : \\ f(0) = 1, \forall t \in [0,\infty) : |f(t)| \leq \frac{-(c_1-c)}{k-c(c_1-c)} e^{\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c}t}, |f'(t)| \leq e^{\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c}t} \Big\}$$

Dafür definieren wir

$$T : C \to C,\ v \mapsto Tv,\ \text{wobei } Tv \text{ Lösung von (4) zu } m := F \circ v.$$

Schauderscher Fixpunktsatz: $\exists \phi \in C : T\phi = \phi$, d.h.,

Übertragung auf nichtlineares Problem:

Wir interessieren uns für Lösungen $\phi \in C$, wobei

$$C := \Big\{ f \in C^1([0,\infty),\mathbb{R}) : \\ f(0) = 1, \forall t \in [0,\infty) : |f(t)| \leq \frac{-(c_1-c)}{k-c(c_1-c)} e^{\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c}t}, |f'(t)| \leq e^{\frac{k-c(c_1-c)}{c_1-c}t} \Big\}$$

Dafür definieren wir

$$T : C \to C, \; v \mapsto Tv, \; \text{wobei } Tv \text{ Lösung von (4) zu } m := F \circ v.$$

Schauderscher Fixpunktsatz: $\exists \phi \in C : T\phi = \phi$, d.h.,

$$\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int_0^t F(\phi(t-s))\dot{\phi}(s)ds = 0, \; \phi(0) = 1.$$

Korollar

Sei für ein $\varepsilon \in (0,1)$ $f \in C^1\left(\left[-\frac{4}{3\varepsilon}, \frac{4}{3\varepsilon}\right], \mathbb{R}\right)$*, zweimal differenzierbar in* $x = 0$*, mit* $f(0) = f'(0) = 0$ *und* $f(1) > -1$*. Dann gibt es ein* $\kappa \in (0,1]$*, so dass gilt:*
Das Problem (1) zu $F := \kappa \cdot f$ *besitzt eine eindeutige Lösung* $\phi \in C^1([0,\infty), \mathbb{R})$*, mit*

$$|\phi(t)| \leq \frac{4}{3+3\kappa f(1)} e^{-\frac{3+3\kappa f(1)}{4}t} \quad \text{und} \quad |\dot{\phi}(t)| \leq e^{-\frac{3+3\kappa f(1)}{4}t}.$$

Korollar

Sei für ein $\varepsilon \in (0,1)$ $f \in C^1\left(\left[-\frac{4}{3\varepsilon}, \frac{4}{3\varepsilon}\right], \mathbb{R}\right)$, zweimal differenzierbar in $x = 0$, mit $f(0) = f'(0) = 0$ und $f(1) > -1$. Dann gibt es ein $\kappa \in (0,1]$, so dass gilt:
Das Problem (1) zu $F := \kappa \cdot f$ besitzt eine eindeutige Lösung $\phi \in C^1([0,\infty), \mathbb{R})$, mit

$$|\phi(t)| \leq \frac{4}{3 + 3\kappa f(1)} e^{-\frac{3+3\kappa f(1)}{4} t} \quad \text{und} \quad |\dot{\phi}(t)| \leq e^{-\frac{3+3\kappa f(1)}{4} t}.$$

Beispiele:

Korollar

Sei für ein $\varepsilon \in (0,1)$ $f \in C^1\left(\left[-\frac{4}{3\varepsilon}, \frac{4}{3\varepsilon}\right], \mathbb{R}\right)$, *zweimal differenzierbar in* $x = 0$, *mit* $f(0) = f'(0) = 0$ *und* $f(1) > -1$. *Dann gibt es ein* $\kappa \in (0,1]$, *so dass gilt:*
Das Problem (1) zu $F := \kappa \cdot f$ *besitzt eine eindeutige Lösung* $\phi \in C^1([0,\infty),\mathbb{R})$, *mit*

$$|\phi(t)| \leq \frac{4}{3+3\kappa f(1)} e^{-\frac{3+3\kappa f(1)}{4}t} \quad \textit{und} \quad |\dot{\phi}(t)| \leq e^{-\frac{3+3\kappa f(1)}{4}t}.$$

Beispiele:

(i) $F(x) = \frac{27}{2624}(x^2 - x^4)$,

Korollar

Sei für ein $\varepsilon \in (0,1)$ $f \in C^1\left(\left[-\frac{4}{3\varepsilon}, \frac{4}{3\varepsilon}\right], \mathbb{R}\right)$, *zweimal differenzierbar in* $x = 0$, *mit* $f(0) = f'(0) = 0$ *und* $f(1) > -1$. *Dann gibt es ein* $\kappa \in (0,1]$, *so dass gilt:*
Das Problem (1) zu $F := \kappa \cdot f$ *besitzt eine eindeutige Lösung* $\phi \in C^1([0,\infty), \mathbb{R})$, *mit*

$$|\phi(t)| \leq \frac{4}{3+3\kappa f(1)} e^{-\frac{3+3\kappa f(1)}{4} t} \quad \textit{und} \quad |\dot{\phi}(t)| \leq e^{-\frac{3+3\kappa f(1)}{4} t}.$$

Beispiele:

(i) $F(x) = \frac{27}{2624}(x^2 - x^4)$,

(ii) $F(x) = \pm\left(\frac{2}{3}\sqrt{21} - 3\right) x^2$.

Bemerkungen

Bemerkungen

Die Einschränkung $F'(0) = 0$ ist für einige Anwendungen aus der Physik zu stark.

Bemerkungen

Die Einschränkung $F'(0) = 0$ ist für einige Anwendungen aus der Physik zu stark. Es gilt jedoch

$$\int_0^t \frac{1}{(1+t-s)^n} \frac{1}{(1+s)^n} ds \leq C \frac{1}{(1+t)^n}, \quad n \in \mathbb{N}, C > 0.$$

Bemerkungen

Die Einschränkung $F'(0) = 0$ ist für einige Anwendungen aus der Physik zu stark. Es gilt jedoch

$$\int_0^t \frac{1}{(1+t-s)^n} \frac{1}{(1+s)^n} ds \leq C \frac{1}{(1+t)^n}, \quad n \in \mathbb{N}, C > 0.$$

Damit lässt sich in ähnlicher Weise eine Selbstabbildung auf der Menge

$$C_n := \Big\{ f \in C^1([0,\infty), \mathbb{R}) : \\ f(0) = 1, \forall t \in [0,\infty) : |f(t)| \leq \tfrac{k}{n-1} \tfrac{1}{(1+t)^{n-1}}, |f'(t)| \leq k \tfrac{1}{(1+t)^n} \Big\}$$

definieren.

Bemerkungen

Die Einschränkung $F'(0) = 0$ ist für einige Anwendungen aus der Physik zu stark. Es gilt jedoch

$$\int_0^t \frac{1}{(1+t-s)^n} \frac{1}{(1+s)^n} ds \leq C \frac{1}{(1+t)^n}, \quad n \in \mathbb{N}, C > 0.$$

Damit lässt sich in ähnlicher Weise eine Selbstabbildung auf der Menge
$C_n := \{ f \in C^1([0,\infty),\mathbb{R}) :$

$$f(0) = 1, \forall t \in [0,\infty) : |f(t)| \leq \tfrac{k}{n-1} \tfrac{1}{(1+t)^{n-1}}, |f'(t)| \leq k \tfrac{1}{(1+t)^n} \}$$

definieren.
Schauderscher Fixpunktsatz liefert unter der schwächeren Voraussetzung $|F'(x)| \leq a$ für ein $a = a(n) > 0$ eine eindeutige Lösung $\phi \in C_n$.

Offene Fragen/Ziele

- Erweiterung der Resultate zu Wohlgestelltheit und Asymptotik auf eine größere Klasse von Kernfunktionen, insbesondere Resultate zu nicht-monotonen Kernfunktionen sind von Interesse.
- Übertragung der Resultate auf die Probleme (2).
- Bestimmung der Konvergenzraten im kritischen Fall $F'(g) = \frac{1}{(1-g)^2}$.

Im zweiten Teil:

- Behandlung von gewissen partiellen Integro-Differentialgleichungen, z.B.

$$\partial_t u(t,x) - \triangle u(t,x) + \int_0^t F(u(t-s,x))\partial_s u(s,x)ds = 0, \quad +\mathrm{AB}, +\mathrm{RB}$$

Offene Fragen/Ziele

- Erweiterung der Resultate zu Wohlgestelltheit und Asymptotik auf eine größere Klasse von Kernfunktionen, insbesondere Resultate zu nicht-monotonen Kernfunktionen sind von Interesse.
- Übertragung der Resultate auf die Probleme (2).
- Bestimmung der Konvergenzraten im kritischen Fall $F'(g) = \frac{1}{(1-g)^2}$.

Im zweiten Teil:

- Behandlung von gewissen partiellen Integro-Differentialgleichungen, z.B.

$$\partial_t u(t,x) - \triangle u(t,x) + \int_0^t F(u(t-s,x))\partial_s u(s,x)ds = 0, \quad +\text{AB}, +\text{RB}$$

Offene Fragen/Ziele

- Erweiterung der Resultate zu Wohlgestelltheit und Asymptotik auf eine größere Klasse von Kernfunktionen, insbesondere Resultate zu nicht-monotonen Kernfunktionen sind von Interesse.
- **Übertragung der Resultate auf die Probleme (2).**
- Bestimmung der Konvergenzraten im kritischen Fall $F'(g) = \frac{1}{(1-g)^2}$.

Im zweiten Teil:

- Behandlung von gewissen partiellen Integro-Differentialgleichungen, z.B.

$$\partial_t u(t,x) - \triangle u(t,x) + \int_0^t F(u(t-s,x))\partial_s u(s,x)ds = 0, \quad +\text{AB}, +\text{RB}$$

Mehrparametrige Kernfunktionen: Monotonie

Mehrparametrige Kernfunktionen: Monotonie

Wir betrachten exemplarisch folgendes physikalisch relevantes Problem mit mehrparametrigen Kernfunktionen

$$\phi(t)+\dot{\phi}(t)+\int_0^t \frac{f(\phi(t-s)}{1+\gamma^2(t-s)^2}\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad t \in [0,\infty), \quad \phi(0) = 1. \quad (5)$$

Mehrparametrige Kernfunktionen: Monotonie

Wir betrachten exemplarisch folgendes physikalisch relevantes Problem mit mehrparametrigen Kernfunktionen

$$\phi(t)+\dot{\phi}(t)+\int_0^t \frac{f(\phi(t-s))}{1+\gamma^2(t-s)^2}\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad t \in [0,\infty), \quad \phi(0) = 1. \quad (5)$$

- $f, f' \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \phi$ ist monoton fallend.

Mehrparametrige Kernfunktionen: Monotonie

Wir betrachten exemplarisch folgendes physikalisch relevantes Problem mit mehrparametrigen Kernfunktionen

$$\phi(t)+\dot{\phi}(t)+\int\limits_0^t \frac{f(\phi(t-s))}{1+\gamma^2(t-s)^2}\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad t \in [0,\infty), \quad \phi(0) = 1. \quad (5)$$

- $f, f' \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \phi$ ist monoton fallend.
- Daraus folgt mit (5): $\phi \geq 0$, d.h., ϕ ist konvergent.

Mehrparametrige Kernfunktionen: Monotonie

Wir betrachten exemplarisch folgendes physikalisch relevantes Problem mit mehrparametrigen Kernfunktionen

$$\phi(t)+\dot{\phi}(t)+\int_0^t \frac{f(\phi(t-s))}{1+\gamma^2(t-s)^2}\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad t \in [0,\infty), \quad \phi(0) = 1. \quad (5)$$

- $f, f' \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \phi$ ist monoton fallend.
- Daraus folgt mit (5): $\phi \geq 0$, d.h., ϕ ist konvergent.
- Wegen (5) gilt $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = 0$.

Mehrparametrige Kernfunktionen: Monotonie

Wir betrachten exemplarisch folgendes physikalisch relevantes Problem mit mehrparametrigen Kernfunktionen

$$\phi(t)+\dot{\phi}(t)+\int_0^t \frac{f(\phi(t-s))}{1+\gamma^2(t-s)^2}\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad t \in [0,\infty), \quad \phi(0) = 1. \quad (5)$$

- $f, f' \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \phi$ ist monoton fallend.
- Daraus folgt mit (5): $\phi \geq 0$, d.h., ϕ ist konvergent.
- Wegen (5) gilt $\lim\limits_{t\to\infty} \phi(t) = 0$.
- $f'(0) < 1$

Mehrparametrige Kernfunktionen: Monotonie

Wir betrachten exemplarisch folgendes physikalisch relevantes Problem mit mehrparametrigen Kernfunktionen

$$\phi(t)+\dot{\phi}(t)+\int_0^t \frac{f(\phi(t-s))}{1+\gamma^2(t-s)^2}\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad t \in [0,\infty), \quad \phi(0)=1. \quad (5)$$

- $f, f' \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \phi$ ist monoton fallend.
- Daraus folgt mit (5): $\phi \geq 0$, d.h., ϕ ist konvergent.
- Wegen (5) gilt $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = 0$.
- $f'(0) < 1 \quad \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \lim_{t\to\infty} t^n\phi(t) = 0.$

Mehrparametrige Kernfunktionen: Monotonie

Wir betrachten exemplarisch folgendes physikalisch relevantes Problem mit mehrparametrigen Kernfunktionen

$$\phi(t)+\dot{\phi}(t)+\int_0^t \frac{f(\phi(t-s))}{1+\gamma^2(t-s)^2}\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad t \in [0,\infty), \quad \phi(0) = 1. \quad (5)$$

- $f, f' \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \phi$ ist monoton fallend.
- Daraus folgt mit (5): $\phi \geq 0$, d.h., ϕ ist konvergent.
- Wegen (5) gilt $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = 0$.
- $f'(0) < 1 \quad \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \lim_{t\to\infty} t^n\phi(t) = 0$.
- Falls $f(0) = 0$, folgt für alle $t \in [0,\infty) : \frac{f(\phi(t))}{1+\gamma^2 t^2} \leq M\phi(t)$ für ein $M > 0$

Mehrparametrige Kernfunktionen: Monotonie

Wir betrachten exemplarisch folgendes physikalisch relevantes Problem mit mehrparametrigen Kernfunktionen

$$\phi(t)+\dot{\phi}(t)+\int_0^t \frac{f(\phi(t-s))}{1+\gamma^2(t-s)^2}\dot{\phi}(s)ds = 0, \quad t \in [0,\infty), \quad \phi(0) = 1. \quad (5)$$

- $f, f' \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \phi$ ist monoton fallend.
- Daraus folgt mit (5): $\phi \geq 0$, d.h., ϕ ist konvergent.
- Wegen (5) gilt $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = 0$.
- $f'(0) < 1 \quad \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \lim_{t\to\infty} t^n \phi(t) = 0$.
- Falls $f(0) = 0$, folgt für alle $t \in [0,\infty) : \frac{f(\phi(t))}{1+\gamma^2 t^2} \leq M\phi(t)$ für ein $M > 0 \quad \Rightarrow \exists s_0 > 0 : \lim_{t\to\infty} e^{s_0 t}\phi(t) = 0$.

Mehrparametrige Kernfunktionen: kleine Kerne

Mehrparametrige Kernfunktionen: kleine Kerne

Wir betrachten folgendes Beispiel aus der Physik:

$$\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int\limits_0^t \frac{f(\phi(t-s))}{1+\gamma^2 \sin^2(t-s)} \dot{\phi}(s) ds = 0 \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad \phi(0) = 1. \quad (6)$$

Mehrparametrige Kernfunktionen: kleine Kerne

Wir betrachten folgendes Beispiel aus der Physik:

$$\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \int_0^t \frac{f(\phi(t-s))}{1+\gamma^2 \sin^2(t-s)} \dot{\phi}(s) ds = 0 \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad \phi(0) = 1. \quad (6)$$

Korollar

Sei $0 < c < \frac{1}{3}$ *mit* $c > \frac{1}{2\gamma^2}\left(\frac{3}{8}(c+1)^2 - \frac{9}{32}(c+1)^3\right)$. *Weiter sei* $f \in C^1\left(\left[-\frac{4}{3(c+1)}, \frac{4}{3(c+1)}\right], \mathbb{R}\right)$ *mit* $f(0) = f'(0) = 0$ *zweimal differenzierbar in* $x = 0$. *Dann existiert ein* $\tau \in (0,1]$ *derart, dass gilt: Das Problem (6) zu* $F := \tau \cdot f$ *besitzt eine eindeutige Lösung* $\phi \in C^1([0,\infty), \mathbb{R})$ *mit*

$$|\phi(t)| \leq \frac{4}{3(c+1)} e^{-\frac{3}{4}(c+1)t} \quad \text{und} \quad |\dot{\phi}(t)| \leq e^{-\frac{3}{4}(c+1)t}$$

für alle $t \in [0, \infty)$.

Offene Fragen/Ziele

- Erweiterung der Resultate zu Wohlgestelltheit und Asymptotik auf eine größere Klasse von Kernfunktionen, insbesondere Resultate zu nicht-monotonen Kernfunktionen sind von Interesse.
- Übertragung der Resultate auf die Probleme (2).
- Bestimmung der Konvergenzraten im kritischen Fall $F'(g) = \frac{1}{(1-g)^2}$.

Im zweiten Teil:

- Behandlung von gewissen partiellen Integro-Differentialgleichungen, z.B.

$$\partial_t u(t,x) - \triangle u(t,x) + \int_0^t F(u(t-s,x))\partial_s u(s,x)ds = 0, \quad +\text{AB}, +\text{RB}$$

Offene Fragen/Ziele

- Erweiterung der Resultate zu Wohlgestelltheit und Asymptotik auf eine größere Klasse von Kernfunktionen, insbesondere Resultate zu nicht-monotonen Kernfunktionen sind von Interesse.
- Übertragung der Resultate auf die Probleme (2).
- Bestimmung der Konvergenzraten im kritischen Fall $F'(g) = \frac{1}{(1-g)^2}$.

Im zweiten Teil:

- Behandlung von gewissen partiellen Integro-Differentialgleichungen, z.B.

$$\partial_t u(t,x) - \triangle u(t,x) + \int_0^t F(u(t-s,x))\partial_s u(s,x)ds = 0, \quad +\mathrm{AB}, +\mathrm{RB}$$

Partielle Integro-Differentialgleichungen

Partielle Integro-Differentialgleichungen

Seien $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $A = \sum_{i,j=1}^{n} -\partial_i a_{ij}(\cdot)\partial_j + a(\cdot)$ ein elliptischer Operator.

Partielle Integro-Differentialgleichungen

Seien $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $A = \sum_{i,j=1}^{n} -\partial_i a_{ij}(\cdot)\partial_j + a(\cdot)$ ein elliptischer Operator.Wir betrachten folgende Probleme

Partielle Integro-Differentialgleichungen

Seien $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $A = \sum_{i,j=1}^{n} -\partial_i a_{ij}(\cdot)\partial_j + a(\cdot)$ ein elliptischer Operator.Wir betrachten folgende Probleme

(i) $u_t(t,x) + Au(t,x) + \int_0^t F(u)(t-s)u_t(s,x)ds = 0,$
$(t,x) \in [0,\infty) \times G,$
AB: $u(0,x) = u_0(x)$ für $x \in G$,
RB: $u(t,x) = 0$ für $(t,x) \in [0,\infty) \times \partial G$,
$F(u) : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ lösungsabhängige Kernfunktion.

Partielle Integro-Differentialgleichungen

Seien $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $A = \sum_{i,j=1}^{n} -\partial_i a_{ij}(\cdot)\partial_j + a(\cdot)$ ein elliptischer Operator.Wir betrachten folgende Probleme

(i) $u_t(t,x) + Au(t,x) + \int_0^t F(u)(t-s)u_t(s,x)ds = 0,$
$(t,x) \in [0,\infty) \times G,$
AB: $u(0,x) = u_0(x)$ für $x \in G,$
RB: $u(t,x) = 0$ für $(t,x) \in [0,\infty) \times \partial G,$
$F(u) : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ lösungsabhängige Kernfunktion.

(ii) $u_t(t,x) + Au(t,x) + \int_0^t F(u(t-s,x))u_t(s,x)ds = 0,$
$(t,x) \in [0,\infty) \times G,$
AB: $u(0,x) = u_0(x)$ für $x \in G,$
RB: $u(t,x) = 0$ für $(t,x) \in [0,\infty) \times \partial G,$
$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$

Partielle Integro-Differentialgleichungen

Partielle Integro-Differentialgleichungen

Wir beginnen mit dem Problem (i):

$$u_t(t,x) + Au(t,x) + \int\limits_0^t F(u)(t-s)u_t(s,x)ds = 0,$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u|_{[0,\infty)\times\partial G} = 0.$$

Partielle Integro-Differentialgleichungen

Wir beginnen mit dem Problem (i):

$$u_t(t,x) + Au(t,x) + \int_0^t F(u)(t-s)u_t(s,x)ds = 0,$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u|_{[0,\infty)\times\partial G} = 0.$$

Bei parabolischen Anfangsrandwertproblemen üblicher Lösungsbegriff:

Partielle Integro-Differentialgleichungen

Wir beginnen mit dem Problem (i):

$$u_t(t,x) + Au(t,x) + \int_0^t F(u)(t-s)u_t(s,x)ds = 0,$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u|_{[0,\infty)\times\partial G} = 0.$$

Bei parabolischen Anfangsrandwertproblemen üblicher Lösungsbegriff:$u \in C^0([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), L^2(G))$, wobei $D(A) = H_0^1(G) \cap H^2(G)$.

Partielle Integro-Differentialgleichungen

Wir beginnen mit dem Problem (i):

$$u_t(t,x) + Au(t,x) + \int_0^t F(u)(t-s)u_t(s,x)ds = 0,$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u|_{[0,\infty)\times\partial G} = 0.$$

Bei parabolischen Anfangsrandwertproblemen üblicher Lösungsbegriff:$u \in C^0([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), L^2(G))$, wobei $D(A) = H_0^1(G) \cap H^2(G)$.

Falls $u_0 \in D(A)$, $F : L^2(G) \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt für ein $u \in C^1([0,\infty), L^2(G))$:

Partielle Integro-Differentialgleichungen

Wir beginnen mit dem Problem (i):

$$u_t(t,x) + Au(t,x) + \int_0^t F(u)(t-s)u_t(s,x)ds = 0,$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u|_{[0,\infty)\times\partial G} = 0.$$

Bei parabolischen Anfangsrandwertproblemen üblicher Lösungsbegriff:$u \in C^0([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), L^2(G))$, wobei $D(A) = H_0^1(G) \cap H^2(G)$.

Falls $u_0 \in D(A)$, $F : L^2(G) \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt für ein $u \in C^1([0,\infty), L^2(G))$: $F(u) * u_t \in C^0([0,\infty), L^2(G))$,

Partielle Integro-Differentialgleichungen

Wir beginnen mit dem Problem (i):

$$u_t(t,x) + Au(t,x) + \int\limits_0^t F(u)(t-s)u_t(s,x)ds = 0,$$
$$u(0,x) = u_0(x), \quad u|_{[0,\infty)\times\partial G} = 0.$$

Bei parabolischen Anfangsrandwertproblemen üblicher Lösungsbegriff:$u \in C^0([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), L^2(G))$, wobei $D(A) = H_0^1(G) \cap H^2(G)$.

Falls $u_0 \in D(A)$, $F : L^2(G) \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt für ein $u \in C^1([0,\infty), L^2(G))$: $F(u) * u_t \in C^0([0,\infty), L^2(G))$,d.h. das Problem

$$u_t + Au + F(u) * u_t \overset{L^2(G)}{=} 0, \quad u(0) \overset{D(A)}{=} u_0$$

ist sinnvoll gestellt.

Wir untersuchen zunächst folgendes lineares Problem zu $m \in C^1([0,\infty),\mathbb{R})$:

Wir untersuchen zunächst folgendes lineares Problem zu $m \in C^1([0,\infty),\mathbb{R})$:

$$u_t(t) + Au(t) + \int_0^t m(t-s)u_t(s)ds \overset{L^2(G)}{=} 0, \;\; u(0) \overset{D(A)}{=} u_0, \tag{7}$$

Wir untersuchen zunächst folgendes lineares Problem zu $m \in C^1([0,\infty),\mathbb{R})$:

$$u_t(t) + Au(t) + \int_0^t m(t-s)u_t(s)ds \overset{L^2(G)}{=} 0, \;\; u(0) \overset{D(A)}{=} u_0, \qquad (7)$$

Lemma

Seien $m \in C^1([0,\infty),\mathbb{R})$ mit $m(0) > -q$ und $|m'(t)| \leq ke^{-c_1 t}$ für alle $t \in [0,\infty)$, wobei $c_1 > \lambda_1$ mit $\lambda_1 = q + m(0)$ und $k > 0$ derart, dass

$$k < \lambda_1(c_1 - \lambda_1).$$

Weiter gelte $\lim\limits_{t\to\infty} m(t) = 0$.

Dann besitzt das Problem (7) zu $u_0 \in D(A^2)$ eine eindeutige Lösung $u \in C^0([0,\infty),D(A)) \cap C^1([0,\infty),L^2(G))$, mit

$$\|u_t(t)\| \leq \|u_0\|_{D(A)} e^{\frac{k-\lambda_1(c_1-\lambda_1)}{c_1-\lambda_1}t}$$

$$\text{und } \|u(t)\| \leq \|u_0\|_{D(A)} \frac{\lambda_1 - c_1}{k - \lambda_1(c_1-\lambda_1)} e^{\frac{k-\lambda_1(c_1-\lambda_1)}{c_1-\lambda_1}t}.$$

Wir untersuchen zunächst folgendes lineares Problem zu $m \in C^1([0,\infty),\mathbb{R})$:

$$u_t(t) + Au(t) + \int_0^t m(t-s)u_t(s)ds \overset{L^2(G)}{=} 0,\ \ u(0) \overset{D(A)}{=} u_0, \qquad (7)$$

Korollar

Falls $u_0 \in D(A^3)$, so gilt

$$\|u_t(t)\|_{D(A)} \leq \|Au_0\|_{D(A)} e^{\frac{k-\lambda_1(c_1-\lambda_1)}{c_1-\lambda_1}t}$$

$$\text{und } \|u(t)\|_{D(A)} \leq \|Au_0\|_{D(A)} \frac{\lambda_1 - c_1}{k-\lambda_1(c_1-\lambda_1)} e^{\frac{k-\lambda_1(c_1-\lambda_1)}{c_1-\lambda_1}t}.$$

(für $u \in D(A)$ ist $\|u\|_{D(A)} = \|Au\| + \|u\|$)

Übertragung auf das nichtlineare Problem:

Übertragung auf das nichtlineare Problem:

Wir interessieren uns für Lösungen $u \in \mathcal{C}$, wobei $u_0 \in D(A^3)$ und

$$\mathcal{C} := \left\{ u \in C^0([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), L^2(G)) \;\middle|\; u(0) \overset{D(A)}{=} u_0, \forall t \in [0,\infty) : \left(\begin{array}{l} \|u(t)\| \le \|u_0\|_{D(A)} \frac{\lambda_1 - c_1}{k - \lambda_1(c_1 - \lambda_1)} e^{\frac{k - \lambda_1(c_1-\lambda_1)}{c_1 - \lambda_1} t}, \\ \|u_t(t)\| \le \|u_0\|_{D(A)} e^{\frac{k - \lambda_1(c_1-\lambda_1)}{c_1 - \lambda_1} t} \\ \text{und } \|u(t)\|_{D(A)} \le \|Au_0\|_{D(A)} \frac{\lambda_1 - c_1}{k - \lambda_1(c_1 - \lambda_1)} e^{\frac{k - \lambda_1(c_1-\lambda_1)}{c_1 - \lambda_1} t} \end{array} \right) \right\}$$

Übertragung auf das nichtlineare Problem:

Wir interessieren uns für Lösungen $u \in \mathcal{C}$, wobei $u_0 \in D(A^3)$ und

$$\mathcal{C} := \left\{ u \in C^0([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), L^2(G)) \;\middle|\; u(0) \overset{D(A)}{=} u_0, \forall t \in [0,\infty) : \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} \|u(t)\| \leq \|u_0\|_{D(A)} \frac{\lambda_1 - c_1}{k - \lambda_1(c_1 - \lambda_1)} e^{\frac{k-\lambda_1(c_1-\lambda_1)}{c_1-\lambda_1} t}, \\ \|u_t(t)\| \leq \|u_0\|_{D(A)} e^{\frac{k-\lambda_1(c_1-\lambda_1)}{c_1-\lambda_1} t} \\ \text{und } \|u(t)\|_{D(A)} \leq \|Au_0\|_{D(A)} \frac{\lambda_1 - c_1}{k - \lambda_1(c_1 - \lambda_1)} e^{\frac{k-\lambda_1(c_1-\lambda_1)}{c_1-\lambda_1} t} \end{pmatrix} \right\}$$

Sei $\mathcal{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $u \mapsto Tu$, wobei Tu Lösung von (7) zur Kernfunktion $m := F \circ u$. Existenz eines Fixpunkts liefert der Schaudersche Fixpunktsatz.

Satz

Seien $u_0 \in D(A^3)$ und $F \in C^0(L^2(G), \mathbb{R})$ lokal Lipschitz-stetig mit $F \circ u \in C^1([0,\infty), \mathbb{R})$ für alle $u \in C^1([0,\infty), L^2(G))$ und $F(u_0) > -q$. Weiter gelte (Konstanten geeignet)

(i) $|F(u)| \leq v_2 \|u\|^\beta$,

(ii) $\left|\frac{d}{dt} F(u(t))\right| \leq v_1 \|u(t)\|^{\alpha_1} \|u_t(t)\|^{\alpha_2}$ *für alle* $u \in C^1(L^2(G))$.

Dann besitzt das Problem zu F eine eindeutige Lösung $u \in C^0([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), L^2(G))$, mit

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\|_{D(A)} \frac{\lambda_1 - c_1}{k - \lambda_1(c_1 - \lambda_1)} e^{\frac{k - \lambda_1(c_1 - \lambda_1)}{c_1 - \lambda_1} t}$$

$$\text{und} \quad \|u_t(t)\| \leq \|u_0\|_{D(A)} e^{\frac{k - \lambda_1(c_1 - \lambda_1)}{c_1 - \lambda_1} t}$$

für alle $t \in [0,\infty)$.

Satz

Seien $u_0 \in D(A^3)$ *und* $F \in C^0(L^2(G), \mathbb{R})$ *lokal Lipschitz-stetig mit* $F \circ u \in C^1([0,\infty), \mathbb{R})$ *für alle* $u \in C^1([0,\infty), L^2(G))$ *und* $F(u_0) > -q$. *Weiter gelte (Konstanten geeignet)*

(i) $|F(u)| \leq v_2 \|u\|^\beta$,

(ii) $\left|\frac{d}{dt} F(u(t))\right| \leq v_1 \|u(t)\|^{\alpha_1} \|u_t(t)\|^{\alpha_2}$ *für alle* $u \in C^1(L^2(G))$.

Dann besitzt das Problem zu F *eine eindeutige Lösung* $u \in C^0([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), L^2(G))$, *mit*

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\|_{D(A)} \frac{\lambda_1 - c_1}{k - \lambda_1(c_1 - \lambda_1)} e^{\frac{k - \lambda_1(c_1 - \lambda_1)}{c_1 - \lambda_1} t}$$

$$\text{und} \quad \|u_t(t)\| \leq \|u_0\|_{D(A)} e^{\frac{k - \lambda_1(c_1 - \lambda_1)}{c_1 - \lambda_1} t}$$

für alle $t \in [0,\infty)$.

$u_0 \in D(A)$

$$u_0 \in D(A)$$

$$D(A^3) \overset{\text{dicht}}{\subseteq} D(A)$$

$$\begin{tikzcd} u_0 \in D(A) \\ u_0^n \in D(A^3) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$$D(A^3) \overset{\text{dicht}}{\subseteq} D(A)$$

$$
\begin{array}{lcl}
u_0 \in D(A) & & \\
\Big\uparrow \quad D(A^3) \overset{\text{dicht}}{\subseteq} D(A) & & \\
u_0^n \in D(A^3) & \longrightarrow & u^n \in C^0([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), L^2(G))
\end{array}
$$

exponentiell abklingende Lösung

$$
\begin{tikzcd}
u_0 \in D(A) & \exists u = \lim_{n\to\infty} u^n \text{ Lösung zum AW } u_0 \\
u_0^n \in D(A^3) \arrow[u, "D(A^3) \overset{\text{dicht}}{\subseteq} D(A)"'] \arrow[r] & \begin{array}{l} u^n \in C^0([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), L^2(G)) \\ \text{exponentiell abklingende Lösung} \end{array} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Beispiele:

Beispiele:

- $F(u) = v_1\|u\|^2$ ($v_1 > 0$ klein, $u \in L^2(G)$).

Beispiele:

- $F(u) = v_1 \|u\|^2$ ($v_1 > 0$ klein, $u \in L^2(G)$).
- Allgemein: $F(u) = f(\|u\|)$, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = f'(0) = 0$ hinreichend klein.

Ortsabhängige Kernfunktionen

Ortsabhängige Kernfunktionen

Nun betrachten wir das Problem (*ii*):

$$u_t(t,x) + Au(t,x) + \int_0^t F(u(t-s,x))u_t(s,x)ds = 0,$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u|_{[0,\infty)\times\partial G} = 0,$$

wobei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ortsabhängige Kernfunktionen

Nun betrachten wir das Problem (*ii*):

$$u_t(t,x) + Au(t,x) + \int_0^t F(u(t-s,x))u_t(s,x)ds = 0,$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u|_{[0,\infty)\times\partial G} = 0,$$

wobei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ziel: Faltungsprodukt in geeigneten Räumen erklären.

Ortsabhängige Kernfunktionen

Nun betrachten wir das Problem (*ii*):

$$u_t(t,x) + Au(t,x) + \int_0^t F(u(t-s,x))u_t(s,x)ds = 0,$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u|_{[0,\infty)\times\partial G} = 0,$$

wobei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ziel: Faltungsprodukt in geeigneten Räumen erklären.

Falls $4k > n$, ist $H^{2k}(G)$ eine Banachalgebra, d.h.,
$u, v \in H^{2k}(G) \;\Rightarrow\; uv \in H^{2k}(G)$

Ortsabhängige Kernfunktionen

Nun betrachten wir das Problem (*ii*):

$$u_t(t,x) + Au(t,x) + \int_0^t F(u(t-s,x))u_t(s,x)ds = 0,$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u|_{[0,\infty)\times\partial G} = 0,$$

wobei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ziel: Faltungsprodukt in geeigneten Räumen erklären.

Falls $4k > n$, ist $H^{2k}(G)$ eine Banachalgebra, d.h.,
$u, v \in H^{2k}(G) \ \Rightarrow \ uv \in H^{2k}(G)$

$\|\cdot\|_{H^{2k}(G)}$-Norm nachteilig (keine Vertauschung mit e^{-tA}), verwenden daher $\|\cdot\|_{D(A^k)}$-Norm.

Erinnerung: $A = \sum_{i,j=1}^{n} -\partial_i a_{ij}(\cdot)\partial_j + a(\cdot) \qquad \text{(formal)}$

Erinnerung: $A = \sum_{i,j=1}^{n} -\partial_i a_{ij}(\cdot)\partial_j + a(\cdot) \quad \text{(formal)}$

- Elliptische Regularität: Falls für ein $k \in \mathbb{N}$: $a_{ij}, a \in C^{2k-1}(\bar{G})$, gilt:

Erinnerung: $A = \sum_{i,j=1}^{n} -\partial_i a_{ij}(\cdot)\partial_j + a(\cdot) \quad$ (formal)

- Elliptische Regularität: Falls für ein $k \in \mathbb{N}$: $a_{ij}, a \in C^{2k-1}(\bar{G})$, gilt:

$$\exists C_1, C_2 > 0 \;\forall u \in D(A^k) : C_1 \|u\|_{H^{2k}(G)} \leq \|u\|_{D(A^k)} \leq C_2 \|u\|_{H^{2k}(G)}.$$

Erinnerung: $A = \sum_{i,j=1}^{n} -\partial_i a_{ij}(\cdot)\partial_j + a(\cdot) \quad$ (formal)

- Elliptische Regularität: Falls für ein $k \in \mathbb{N}$: $a_{ij}, a \in C^{2k-1}(\bar{G})$, gilt:

  $$\exists C_1, C_2 > 0 \; \forall u \in D(A^k) : C_1\|u\|_{H^{2k}(G)} \leq \|u\|_{D(A^k)} \leq C_2\|u\|_{H^{2k}(G)}.$$

- Falls $4k > n$, $F \in C^{2k}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $|F^{(i)}(x)| \leq v_1|x|^\alpha$ $(i = 0, \ldots, 2(k-1),\ v_1, \alpha > 0)$:

Erinnerung: $A = \sum_{i,j=1}^{n} -\partial_i a_{ij}(\cdot)\partial_j + a(\cdot)$ (formal)

- Elliptische Regularität: Falls für ein $k \in \mathbb{N}$: $a_{ij}, a \in C^{2k-1}(\bar{G})$, gilt:

  $$\exists C_1, C_2 > 0\ \forall u \in D(A^k) : C_1\|u\|_{H^{2k}(G)} \leq \|u\|_{D(A^k)} \leq C_2\|u\|_{H^{2k}(G)}.$$

- Falls $4k > n$, $F \in C^{2k}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $|F^{(i)}(x)| \leq v_1|x|^\alpha$ ($i = 0, \dots, 2(k-1)$, $v_1, \alpha > 0$):

  $$\exists C_4 > 0\ \forall u \in D(A^k) : F(u) \in D(A^k) \text{ mit } \|F(u)\|_{D(A^k)} \leq C_4 v_1 \|u\|_{D(A^k)}^\alpha.$$

Erinnerung: $A = \sum_{i,j=1}^{n} -\partial_i a_{ij}(\cdot)\partial_j + a(\cdot)$ (formal)

- Elliptische Regularität: Falls für ein $k \in \mathbb{N}$: $a_{ij}, a \in C^{2k-1}(\bar{G})$, gilt:

  $$\exists C_1, C_2 > 0 \ \forall u \in D(A^k) : C_1 \|u\|_{H^{2k}(G)} \leq \|u\|_{D(A^k)} \leq C_2 \|u\|_{H^{2k}(G)}.$$

- Falls $4k > n$, $F \in C^{2k}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $|F^{(i)}(x)| \leq v_1 |x|^\alpha$ $(i = 0, \ldots, 2(k-1),\ v_1, \alpha > 0)$:

  $$\exists C_4 > 0 \ \forall u \in D(A^k) : F(u) \in D(A^k) \text{ mit } \|F(u)\|_{D(A^k)} \leq C_4 v_1 \|u\|^\alpha_{D(A^k)}.$$

- Falls $4k > n$, $F \in C^{2k}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit F^{2k} lokal Lipschitz-stetig und $F^{(i)}(0) = 0$ $(i = 0, \ldots, 2(k-1))$:

Erinnerung: $A = \sum_{i,j=1}^{n} -\partial_i a_{ij}(\cdot)\partial_j + a(\cdot)$ (formal)

- Elliptische Regularität: Falls für ein $k \in \mathbb{N}$: $a_{ij}, a \in C^{2k-1}(\bar{G})$, gilt:

$$\exists C_1, C_2 > 0 \ \forall u \in D(A^k) : C_1\|u\|_{H^{2k}(G)} \leq \|u\|_{D(A^k)} \leq C_2\|u\|_{H^{2k}(G)}.$$

- Falls $4k > n$, $F \in C^{2k}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $|F^{(i)}(x)| \leq v_1|x|^\alpha$ $(i = 0, \ldots, 2(k-1),\ v_1, \alpha > 0)$:

$$\exists C_4 > 0 \ \forall u \in D(A^k) : F(u) \in D(A^k) \text{ mit } \|F(u)\|_{D(A^k)} \leq C_4 v_1 \|u\|^\alpha_{D(A^k)}.$$

- Falls $4k > n$, $F \in C^{2k}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit F^{2k} lokal Lipschitz-stetig und $F^{(i)}(0) = 0$ $(i = 0, \ldots, 2(k-1))$:

$$\forall M > 0 \ \exists K > 0 \ \forall u_1, u_2 \in D(A^k) \text{ mit } \|u_i\|_{D(A^k)} \leq M \ (i = 1, 2) :$$

$$\|F(u_1) - F(u_2)\|_{D(A^k)} \leq K\|u_1 - u_2\|_{D(A^k)},$$

Erinnerung: $A = \sum_{i,j=1}^{n} -\partial_i a_{ij}(\cdot)\partial_j + a(\cdot) \quad$ (formal)

- Elliptische Regularität: Falls für ein $k \in \mathbb{N}$: $a_{ij}, a \in C^{2k-1}(\bar{G})$, gilt:

$$\exists C_1, C_2 > 0\ \forall u \in D(A^k) : C_1 \|u\|_{H^{2k}(G)} \leq \|u\|_{D(A^k)} \leq C_2 \|u\|_{H^{2k}(G)}.$$

- Falls $4k > n$, $F \in C^{2k}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $|F^{(i)}(x)| \leq v_1 |x|^\alpha$ $(i = 0, \ldots, 2(k-1),\ v_1, \alpha > 0)$:

$$\exists C_4 > 0\ \forall u \in D(A^k) : F(u) \in D(A^k) \text{ mit } \|F(u)\|_{D(A^k)} \leq C_4 v_1 \|u\|_{D(A^k)}^\alpha.$$

- Falls $4k > n$, $F \in C^{2k}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit F^{2k} lokal Lipschitz-stetig und $F^{(i)}(0) = 0$ $(i = 0, \ldots, 2(k-1))$:

$$\forall M > 0\ \exists K > 0\ \forall u_1, u_2 \in D(A^k) \text{ mit } \|u_i\|_{D(A^k)} \leq M\ (i = 1, 2) :$$

$$\|F(u_1) - F(u_2)\|_{D(A^k)} \leq K \|u_1 - u_2\|_{D(A^k)},$$

und $\exists C_3 > 0\ \forall u, v \in D(A^k) : \|F(u)v\|_{D(A^k)} \leq C_3 \|F(u)\|_{D(A^k)} \|v\|_{D(A^k)}$.

Weiteres Vorgehen ähnlich zum Fall ortsunabhängiger Kernfunktionen:

Weiteres Vorgehen ähnlich zum Fall ortsunabhängiger Kernfunktionen:

- Wohlgestelltheit und Asymptotik zum linearen Problem

$$u \in C^0([0,\infty), D(A^k)) \cap C^1([0,\infty), D(A^{k-1})) :$$

$$u_t(t) + Au(t) + \int_0^t m(t-s)u_t(s)ds = 0, \quad t \in (0,\infty),$$

$$u(0) = u_0 \in D(A^{k+1}), \quad m \in C^1([0,\infty), D(A^k)).$$

Weiteres Vorgehen ähnlich zum Fall ortsunabhängiger Kernfunktionen:

- Wohlgestelltheit und Asymptotik zum linearen Problem

$$u \in C^0([0,\infty), D(A^k)) \cap C^1([0,\infty), D(A^{k-1})):$$

$$u_t(t) + Au(t) + \int_0^t m(t-s)u_t(s)ds = 0, \quad t \in (0,\infty),$$

$$u(0) = u_0 \in D(A^{k+1}), \quad m \in C^1([0,\infty), D(A^k)).$$

- Aufstellen einer Fixpunktgleichung zum nichtlinearen Problem bezüglich der Menge

$$\mathcal{C} = \Big\{ u \in C^1([0,\infty), D(A^k)) : u(0) = u_0, \\ \|u(t)\|_{D(A^k)}, \|u_t(t)\|_{D(A^k)}, \|u(t)\|, \|u_t(t) \text{ klingen exponentiell ab} \Big\}.$$

Weiteres Vorgehen ähnlich zum Fall ortsunabhängiger Kernfunktionen:

- Wohlgestelltheit und Asymptotik zum linearen Problem

$$u \in C^0([0,\infty), D(A^k)) \cap C^1([0,\infty), D(A^{k-1})) :$$

$$u_t(t) + Au(t) + \int_0^t m(t-s) u_t(s) ds = 0, \quad t \in (0,\infty),$$

$$u(0) = u_0 \in D(A^{k+1}), \quad m \in C^1([0,\infty), D(A^k)).$$

- Aufstellen einer Fixpunktgleichung zum nichtlinearen Problem bezüglich der Menge

$$\mathcal{C} = \big\{ u \in C^1([0,\infty), D(A^k)) : u(0) = u_0, \\ \|u(t)\|_{D(A^k)}, \|u_t(t)\|_{D(A^k)}, \|u(t)\|, \|u_t(t) \text{ klingen exponentiell ab} \big\} .$$

- Fixpunkteargumente liefern eine Lösung zum nichtlinearen Problem.

Lemma

Seien $n \leq 3$ *und* $f \in C^3\left(\left[-\frac{C_0}{C_1}\|Au_0\|_{D(A)}\frac{2}{q}, \frac{C_0}{C_1}\|Au_0\|_{D(A)}\frac{2}{q}\right], \mathbb{R}\right)$, *viermal differenzierbar in* $x = 0$ *mit* f''' *lokal Lipschitz-stetig und* $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$. *Dann existiert ein* $\kappa > 0$ *derart, dass das Problem*

$$u_t(t,x) + Au(t,x) + \int_0^t F(u(t-s,x))u_t(s,x)ds = 0,$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u|_{[0,\infty)\times\partial G} = 0,$$

zu $F = \kappa \cdot f$ *eine eindeutige Lösung* $u \in C^1([0,\infty), D(A))$ *besitzt, die und deren Ableitung* u_t *bezüglich* $\|\cdot\|_{D(A)}$ *und* $\|\cdot\|$ *exponentiell abklingen.*

Offene Fragen/ weitere Ziele

Offene Fragen/ weitere Ziele

- Blow-up-Resultate für die Probleme gewöhnlicher und partieller Integro-DGls.

Offene Fragen/ weitere Ziele

- Blow-up-Resultate für die Probleme gewöhnlicher und partieller Integro-DGls.
- Gewöhnliche IDGLs: Asymptotikresultate im Fall beschränkter, nicht monoton wachsender großer Kerne, z.B. $F(x) = \cos(x)$.

Offene Fragen/ weitere Ziele

- Blow-up-Resultate für die Probleme gewöhnlicher und partieller Integro-DGls.
- Gewöhnliche IDGLs: Asymptotikresultate im Fall beschränkter, nicht monoton wachsender großer Kerne, z.B. $F(x) = \cos(x)$.
- Gewöhnliche IDGls: Konvergenzraten im Fall $F'(0) = 1$ falls $F(x_0) > x_0$ für ein $x_0 \in (0, 1]$, z.B. für $F(x) = x + x^2$.

Offene Fragen/ weitere Ziele

- Blow-up-Resultate für die Probleme gewöhnlicher und partieller Integro-DGls.
- Gewöhnliche IDGLs: Asymptotikresultate im Fall beschränkter, nicht monoton wachsender großer Kerne, z.B. $F(x) = \cos(x)$.
- Gewöhnliche IDGls: Konvergenzraten im Fall $F'(0) = 1$ falls $F(x_0) > x_0$ für ein $x_0 \in (0, 1]$, z.B. für $F(x) = x + x^2$.
- Partielle IDGLs: Verbesserung der Bedingungen an die Kernfunktion.

Offene Fragen/ weitere Ziele

- Blow-up-Resultate für die Probleme gewöhnlicher und partieller Integro-DGls.
- Gewöhnliche IDGLs: Asymptotikresultate im Fall beschränkter, nicht monoton wachsender großer Kerne, z.B. $F(x) = \cos(x)$.
- Gewöhnliche IDGls: Konvergenzraten im Fall $F'(0) = 1$ falls $F(x_0) > x_0$ für ein $x_0 \in (0, 1]$, z.B. für $F(x) = x + x^2$.
- Partielle IDGLs: Verbesserung der Bedingungen an die Kernfunktion.
- Partielle IDGLs: Resultate im Ganz- oder Halbraumfall.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit