Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2016/2017
Ben Lambert

## Übungen zur Vorlesung Theorie partieller Differentialgleichungen

### *Blatt 1*

**Aufgabe 1.** *(4 Punkte)*
Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und sei $B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Sei $\eta$ eine Friedrichsche Glättungsfunktion, d. h. es gilt $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} \eta \subset B_1(0)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, d\lambda = 1$ und $\eta \geq 0$. Wir definieren für beliebige $\varepsilon > 0$ die zugehörige Diracfolge $\eta_\varepsilon := \varepsilon^{-n} \eta \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$. Wir setzen $f$ durch Null auf das Komplement von $\Omega$ fort und definieren für beliebige $\varepsilon > 0$ die Funktionen $f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y) f(y) dy$. Sei $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ eine Nullfolge und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Zeige die folgenden Aussagen:

(i) Es gilt $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
(ii) Sei $K \subset \Omega$ eine kompakte Teilmenge von $\Omega$ und sei in dieser Teilaufgabe $f$ noch zusätzlich stetig auf $\Omega$. Dann gilt $f_{\varepsilon_n} \rightrightarrows f$ auf $K$ für $n \to \infty$.
(iii) Sei $m \in \mathbb{N}_+$. Sei in dieser Teilaufgabe $f$ noch zusätzlich von der Klasse $C^m(\Omega)$. Sei $x \in \Omega$. Falls $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$ gilt, dann ist $D^\alpha f_\varepsilon(x) = (D^\alpha f)_\varepsilon(x)$ für alle Multiindizes $\alpha$ mit $|\alpha| \leq m$. Sei $\Omega' \Subset \Omega$ offen, dann gilt $\|f_{\varepsilon_n} - f\|_{C^m(\Omega')} \to 0$ für $n \to \infty$.

**Aufgabe 2.** *(4 Punkte)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Sei $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

(i) Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$. Benutze den Gaußschen Divergenzsatz um
$$\int_\Omega u_i = \int_{\partial\Omega} u\nu^i$$
zu beweisen.
(ii) Seien $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$. Zeige, dass für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$
$$\int_\Omega u_i v = -\int_\Omega u v_i + \int_{\partial\Omega} uv\nu^i$$
gilt.
(iii) Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Sei $f \in C^0(\overline{\Omega})$ mit $f > 0$. Zeige, dass das Randwertproblem
$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \langle Du, \nu \rangle = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$
keine Lösung besitzt.

**Aufgabe 3.** *(4 Punkte)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Sei $u \in C^2(\Omega)$. Entscheide und beweise, ob die folgenden Differentialgleichungen entlang der Lösung $u$ elliptisch sind:

(i) Sei $(a^{ij}) \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^{n^2})$ eine Funktion, so dass $(a^{ij})(x)$ für alle $x \in \Omega$ eine symmetrische und positiv definite Matrix ist. $u$ erfülle die Differentialgleichung $\sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{ij} = 0$.
(ii) $u$ erfülle die Minimalflächengleichung $\operatorname{div} \left( \frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) = 0$.
(iii) Sei $f \in C^1(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. $u$ erfülle die Monge-Ampère Gleichung $\det D^2 u = f(x, u, Du)$.
(iv) Sei $f \in C^1(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. $u$ sei strikt konvex und erfülle die Monge-Ampère Gleichung $\det D^2 u = f(x, u, Du)$.

**Aufgabe 4.** *(4 Punkte)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

(i) Nehme an, dass $\Delta u(x) > 0$ für alle $x \in \Omega$ erfüllt ist. Zeige, dass für alle $x \in \Omega$
$$u(x) < \sup_{y \in \partial\Omega} u(y)$$
gilt.

(ii) Nehme an, dass $\Delta u(x) \geq 0$ für alle $x \in \Omega$ erfüllt ist. Zeige, dass
$$\sup_{x \in \Omega} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u(x)$$
gilt. *Hinweis:* Berechne $\Delta v$, wobei $v(x) := e^{x_1}$ für $x \in \Omega$ sei.

*Website:* `http://www.math.uni-konstanz.de/~lambert/Lehre.html`