Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2016/2017
Ben Lambert

Übungen zur Vorlesung Theorie partieller Differentialgleichungen

Blatt 3

Abgabe: Bis Donnerstag, 10. November 2016, 17:00 Uhr, in die Briefksten neben F 411. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie Ihre Blätter zusammen.
Website: `http://www.math.uni-konstanz.de/~lambert/Lehre.html`

Aufgabe 1. (2 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Seien $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ Lösungen der RWP

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \Delta v = f & \text{in } \Omega, \\ v = \psi & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Zeige, dass

$$\max_{\overline{\Omega}} |u - v| \le \max_{\partial\Omega} |\varphi - \psi|$$

gilt.

Aufgabe 2. (6 + 2 Punkte) Sei $2 \le n \in \mathbb{N}$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Sei $f \in C^0(\overline{\Omega})$ und sei $u := \Phi \star f$, wobei Φ die Fundamentallösung der Laplacegleichung sei. Zeige die folgenden Aussagen:

(i) Für $1 \le i \le n$ sei

$$v_i(x) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x-y) f(y) dy.$$

Dann ist u stetig partiell differenzierbar und $u_i = v_i$.
Anleitung: Sei $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ mit $0 \le \eta \le 1$, $0 \le \eta' \le 2$, $\eta(t) = 0$ für $t \le 1$ und $\eta(t) = 1$ für $t \ge 2$. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir $\eta_\varepsilon(t) := \eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ und die Funktionen

$$w_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_\Omega \Phi(x-y)\eta_\varepsilon(|x-y|) f(y) dy.$$

Zeige, dass für kompakte Mengen $K \subset \mathbb{R}^n$

$$\sup_{x \in K} |w_\varepsilon(x) - u(x)| \to 0 \text{ für } \varepsilon \to 0$$

und

$$\sup_{x \in K} |D_i w_\varepsilon(x) - v_i(x)| \to 0 \text{ für } \varepsilon \to 0$$

gelten.

(ii) *Zusatz:* Sei $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann ist u zweimal stetig differenzierbar und eine Lösung der Gleichung $-\Delta u = f$ in Ω.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$. Gilt für jede Kugel $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$

$$u(x) = \fint_{B_r(x)} u(y)\, dy,$$

so ist u in Ω harmonisch. Zeige dies.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Beweise den Satz von Liouville mit Hilfe der Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen.