Oliver Schnürer, Ben Lambert Universität Konstanz Wintersemester 2016/2017

Übungen zur Vorlesung Theorie partieller Differentialgleichungen

Blatt 4

Abgabe: Bis Donnerstag, 17. November 2016, 17:00 Uhr, in die Briefksten neben F 411. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie Ihre Blätter zusammen.
Website: `http://www.math.uni-konstanz.de/~lambert/Lehre.html`

Aufgabe 1. (4 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^0(\Omega)$. Nehme an, dass für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega u(x)\Delta\varphi(x)\,dx = 0$$

gilt. Zeige, dass u in Ω harmonisch ist.

Anleitung: Zeige, dass

(i) die Mollifizierungen u_ε auch diese Integralbedingung erfüllen,
(ii) die Mollifizierungen u_ε harmonisch sind und
(iii) u die Mittelwerteigenschaft erfüllt.

Aufgabe 2. (2 Punkte) Seien $k, n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass

$$(x_1 + \ldots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \binom{|\alpha|}{\alpha} x^\alpha$$

gilt, wobei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ein Multiindex ist und

$$\begin{aligned} \binom{|\alpha|}{\alpha} &:= \frac{|\alpha|!}{\alpha!}, \\ \alpha! &:= \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_n!, \\ x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \\ |\alpha| &:= \alpha_1 + \ldots + \alpha_n. \end{aligned}$$

Hinwies: Taylorentwicklung oder Induktion.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ in Ω harmonisch. Zeige, dass u in Ω reell analytisch ist.
Anleitung: Sei $x_0 \in \Omega$ und wähle $r := \frac{1}{4}\operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$.

(i) Sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ein Multiindex mit $|\alpha| = k \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es eine von α unabhängige Konstante $c > 0$ mit

$$\|D^\alpha u\|_{C^0(B_r(x_0))} \leq c \left(\frac{2^{n+1}n^2 e}{r}\right)^k \alpha!$$

gibt. Verwende hierfür die Stirlingsche Formel

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^{k+\frac{1}{2}}}{k!e^k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

(ii) Sei $r_0 := \frac{r}{2^{n+2}n^3 e}$. Zeige, dass die Taylorreihe von u um x_0 in $B_{r_0}(x_0)$ konvergiert.

Aufgabe 4. (6 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch.

(i) Sei u nach unten beschränkt. Zeige, dass u konstant ist.

(ii) Sei $k \in \mathbb{N}$. Nehme an es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$|u(x)| \leq C(1 + |x|^k)$$

gilt. Zeige, dass u ein Polynom mit $\operatorname{grad} u \leq k$ ist.