Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2016/2017
Ben Lambert

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG THEORIE PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Blatt 5

Abgabe: Bis Donnerstag, 24. November 2016, 17:00 Uhr, in die Briefksten neben F 411. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie Ihre Blätter zusammen.
Website: `http://www.math.uni-konstanz.de/~lambert/Lehre.html`

Aufgabe 1. (4 Punkte) Zeige, dass die Funktion u, die wir im Theorem „Poissonsche Darstellungsformel für einen Halbraum“ definiert haben, in $C^\infty\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Sei $\Delta u = f$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die sogenannte *Kelvintransformierte* von u, die durch

$$v(x) = |x|^{2-n} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right), \qquad \text{für } \frac{x}{|x|^2} \in \Omega$$

definiert ist, der Gleichung

$$\Delta v(x) = |x|^{-(n+2)} f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

genügt.

Aufgabe 3. (8 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Sei $r \in \mathbb{R}_+$. Sei $g \in C^2(\overline{B_r(0)})$. Sei $u \in C^2(\overline{B_r(0)})$ eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } B_r(0), \\ u = g & \text{auf } \partial B_r(0). \end{cases}$$

(i) Sei $0 \neq x \in B_r(0)$. Zeige, dass $\varphi^x(y) := \Phi(\frac{|x|}{r}|y - \tilde{x}|)$ mit der Involution $\tilde{x} = \frac{r^2 x}{|x|^2}$ das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta\varphi^x = 0 & \text{in } B_r(0) \\ \varphi^x(y) = \Phi(y - x) & \text{für } y \in \partial B_r(0) \end{cases}$$

löst. Für $x = 0$ setzen wir $\varphi^x \equiv \Phi(r)$.

(ii) Sei für $x, y \in B_r(0)$ mit $x \neq y$ die Funktion $G(x, y) := \Phi(y - x) - \varphi^x(y)$ definiert. Verwende Theorem 3.20, um die Darstellung des Integralkerns K in

$$u(x) = \int_{\partial B_r(0)} K(x, y) g(y) dy$$

herzuleiten.

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Zusatz:* Sei $K(x, y)$ wie im Theorem über die Poissonsche Darstellungsformel für einen Halbraum und $n \geq 2$. Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n_+$

$$1 = \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x, y)\, dy$$

gilt. Es genügt den Beweis für $n = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}$ durchzuführen.
Hinweis: Zeige die Behauptung per Induktion nach m und verwende $n\omega_n = 2\pi\omega_{n-2}$.