Oliver Schnürer, Ben Lambert Universität Konstanz Wintersemester 2016/2017

Übungen zur Vorlesung Theorie partieller Differentialgleichungen

Blatt 6

Abgabe: Bis Donnerstag, 1. Dezember 2016, 17:00 Uhr, in die Briefksten neben F 411. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie Ihre Blätter zusammen.
Website: `http://www.math.uni-konstanz.de/~lambert/Lehre.html`

Aufgabe 1. (4 Punkte) Sei $r > 0$ und $g \in C^0(\partial B_r)$, $B_r \subset \mathbb{R}^n$. Definiere

$$u(x) := \int\limits_{\partial B_r} K(x,y)g(y)\,dy$$

mit

$$K(x,y) := \frac{r^2 - |x|^2}{n\omega_n r}\frac{1}{|x-y|^n}$$

für $x \in B_r$ und $y \in \partial B_r$. Dann gelten

(i) $u \in C^\infty(B_r)$,
(ii) $\Delta u = 0$ in B_r,
(iii) u lässt sich stetig auf ∂B_r fortsetzen und die Fortsetzung $\tilde{u}$ erfüllt dort $\tilde{u} = g$.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend. Seien $u, v \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$. Sei u eine C^0-subharmonische Funktion und v eine C^0-superharmonische Funktion. Gelte $u = v$ auf $\partial\Omega$. Dann gilt entweder $u < v$ in Ω oder $u \equiv v$. Im zweiten Fall sind beide Funktionen harmonisch.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^0(\Omega)$. Dann erfüllt u die Ungleichung $\Delta u \geq 0$ im Viskositätssinne, falls für jeden Punkt $x_0 \in \Omega$, jede Kugel $B_r(x_0) \subset \Omega$, $r \in \mathbb{R}_+$, und jede Funktion $\varphi \in C^2(B_r(x_0))$ mit

$$u(x_0) = \varphi(x_0)$$

und

$$u(x) \leq \varphi(x) \quad \text{für } x \in B_r(x_0)$$

folgt, dass

$$\Delta\varphi(x_0) \geq 0.$$

Analog definiert man $\Delta u \leq 0$ im Viskositätssinne. Falls $\Delta u \geq 0$ und $\Delta u \leq 0$ im Viskositätssinne gelten, so heißt u im Viskositätssinne harmonisch oder eine Viskositätslösung von $\Delta u = 0$.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^0(\Omega)$. Zeige, dass u genau dann im Viskositätssinne harmonisch ist, wenn u (nach bisheriger Definition) harmonisch ist.

Tipp: Zeige, dass eine Viskositätslösung von $\Delta u = 0$ auch C^0-subharmonisch sowie C^0-superharmonisch ist.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^2$.

(i) Zeige, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ und offene, beschränkte Mengen $U_i, V_i \subset \mathbb{R}^n$ für $i \in \{1, \ldots, m\}$ gibt, so dass $U_i \Subset V_i$ ist, $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$ gilt und so dass $\partial\Omega \cap V_i$ Graph einer C^2-Funktion u_i ist und $\Omega \cap V_i$ jeweils auf einer Seite dieses Graphen liegt. Zeige, dass man die Mengen $(V_i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ so wählen kann, dass u_i die Gradientenabschätzung $\|Du_i\| \le \frac{1}{8}$ erfüllt.

(ii) Zeige, dass Ω eine gleichmäßige äußere (und innere) Kugelbedingung erfüllt.
Hinweis: Sei $i \in \{1, \ldots, m\}$ fest. Dann ist $\partial\Omega \cap V_i$ Graph einer C^2-Funktion u. Sei $x = (\hat{x}, u(\hat{x})) \in \partial\Omega \cap U_i$. Sei $r \in \mathbb{R}_+$ klein. Bestimme $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, so dass die Funktion

$$v : B_r^{n-1}(\hat{x}) \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \sqrt{r^2 - |y - \hat{x} - \bar{x}|^2} - \sqrt{r^2 - |\bar{x}|^2} + u(\hat{x})$$

die Bedingung $Dv(\hat{x}) = Du(\hat{x})$ erfüllt. Zeige dann mit Hilfe der Taylorentwicklung, dass für kleine $r > 0$ die Funktion $u - v : B_r^{n-1}(\hat{x}) \setminus \{\hat{x}\} \to \mathbb{R}$ positiv ist.