Oliver Schnürer, Ben Lambert Universität Konstanz Wintersemester 2016/2017

Übungen zur Vorlesung Theorie partieller Differentialgleichungen

Blatt 7

Abgabe: Bis Donnerstag, 8. Dezember 2016, 17:00 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie Ihre Blätter zusammen.
Website: `http://www.math.uni-konstanz.de/~lambert/Lehre.html`

Aufgabe 1. (4 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $f \in C^0(\overline{\Omega})$. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit $Lu \geq f$. Hierbei betrachten wir

$$Lu(x) = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{ij}(x) + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_i(x) + d(x)u(x),$$

wobei

(i) a^{ij} symmetrisch ist, d. h. $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$ gilt.
(ii) L gleichmaßig elliptisch ist: Es existiert $\lambda > 0$, so dass

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j$$

für alle $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.
(iii) die Koeffizienten gleichmäßig beschränkt sind, d. h. es gibt $K > 0$, so dass

$$|a^{ij}(x)|, |b^i(x)|, |d(x)| \leq K$$

für alle i, j und alle $x \in \Omega$.

Sei $d \leq 0$. Zeige, dass es eine Konstante $c = c(\Omega, K, \lambda)$ gibt, so dass

$$\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + c \sup_\Omega |f|$$

gilt.

Aufgabe 2. (12 Punkte) Sei $T > 0$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend. Erfülle

$$u \in C^2(\Omega \times (0,T)) \cap C^0\left((\Omega \times (0,T)) \cup \mathcal{P}(\Omega \times (0,T))\right)$$

die Differentialungleichung

$$\dot{u} \leq Lu \quad \text{in } \Omega \times (0,T),$$

wobei wir annehmen, dass

$$Lu(x,t) = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x,t)u_{ij}(x,t) + \sum_{i=1}^n b^i(x,t)u_i(x,t) + d(x,t)u(x,t),$$

wobei

(i) a^{ij} symmetrisch ist, d. h. $a^{ij}(x,t) = a^{ji}(x,t)$ gilt.
(ii) L gleichmaßig elliptisch ist: Es existiert $\lambda > 0$, so dass

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j$$

für alle $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(iii) die Koeffizienten gleichmäßig beschränkt sind, d. h. es gibt $K > 0$, so dass

$$|a^{ij}(x,t)|, |b^i(x,t)|, |d(x,t)| \leq K$$

für alle i, j und alle $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$.

a) Sei $d \leq 0$. Zeige, dass

$$\sup_{\Omega \times (0,T)} u^+ \leq \sup_{\mathcal{P}(\Omega \times (0,T))} u^+$$

gilt.

b) Zeige, dass

$$\sup_{\Omega \times (0,T)} u^+ \leq \sup_{\mathcal{P}(\Omega \times (0,T))} (e^{Kt} u^+)$$

gilt.

c) Sei $t_0 \in (0,T)$ und $I = (t_0 - \delta, t_0)$ mit $0 < \delta < t_0$. Sei $x_0 \in \partial\Omega$ und gelte
   (i) es gibt eine Kugel $B_R(y) \subset \Omega$ mit $x_0 \in \partial B_R(y)$
   (ii) $0 = u(x_0, t_0) > u(x,t)$ für $(x,t) \in \left(\overline{B_R}(y) \times \overline{I}\right) \setminus \{(x_0, t_0)\}$.

   Zeige, dass

$$\langle Du(x_0, t_0), x_0 - y \rangle > 0,$$

   ist, falls diese Ableitung existiert.

d) Sei $t_0 \in (0,T)$ und $I = (t_0 - \delta, t_0)$ mit $0 < \delta < t_0$. Nehme an, dass $u < 0$ in $I \times \overline{\Omega}$ gilt und dass es ein $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0, t_0) = 0$ gibt. Zeige, dass $u(x, t_0) = 0$ für alle $x \in \Omega$ gilt.