Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2016/2017
Ben Lambert

Übungen zur Vorlesung Theorie partieller Differentialgleichungen

Blatt 8

Abgabe: Bis **Mittwoch, 14**. Dezember 2016, 17:00 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie Ihre Blätter zusammen.
Website: `http://www.math.uni-konstanz.de/~lambert/Lehre.html`

Aufgabe 1. (2 Punkte) Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ eine Lösung von $\dot{u} - \Delta u = 0$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige, dass

$$u_\lambda : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad (x,t) \mapsto u\left(\lambda x, \lambda^2 t\right)$$

ebenfalls eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

Aufgabe 2. (1+2+2+4 Punkte) Sei u die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{u} = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(\cdot,0) = u_0(\cdot) & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

aus Theoren 7.5.

(i) Es gilt
$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$
für alle $t > 0$.

(ii) Gelte
$$\lim_{r\to\infty} \sup_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)} |u_0| = 0.$$
Dann folgt
$$\lim_{r\to\infty} \sup_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)} |u(\cdot,t)| = 0$$
für alle $t > 0$.

(iii) Sei u_0 wie in (ii). Dann gilt
$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\mathbb{R}^n} |u(\cdot,t)| = 0.$$

(iv) *Zusatz:* Zeige, dass es $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und Folgen $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}, (\tau_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $t_k \to \infty$ und $\tau_k \to \infty$ gibt, so dass
$$u(0,t_k) \to 1 \qquad \text{und} \qquad u(0,\tau_k) \to 0$$
für $k \to \infty$ konvergieren.
Hinweis: Betrachte ein Glas Tee in einem kalten Kühlschrank in einem warmen Zimmer im Winter . . . .

Aufgabe 3. (1+4+3 Punkte) Sei u die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{u} = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(\cdot,0) = u_0(\cdot) & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

aus Theoren 7.5. Sei u_0 $\mathbb{Z}^n$-periodisch, dass heißt, es gelte $u_0\left(x + \vec{k}\right) = u_0(x)$ für alle $\vec{k} \in \mathbb{Z}^n$. Gelte $\sup\limits_{\mathbb{R}^n} |u_0| \le K$ mit $K \in \mathbb{R}$.

(i) Zeige, dass $u(\cdot,t)$ für alle $t > 0$ ebenfalls $\mathbb{Z}^n$-periodisch ist. Warum sollte man hierfür nicht das Maximumprinzip auf $u(x,t) - u\left(x + \vec{k}\right)$ anwenden?

(ii) Zeige, dass
$$|Du|(x,t) \leq \frac{K}{\sqrt{t}} \qquad \text{für alle } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$$
gilt.
Hinweis: Benutze die C^0 -Schranke aus der letzten Aufgabe und formuliere und wende ein Maximumprizip auf
$$w(x,t) = u^2(x,t) + t|Du|^2(x,t)$$
an, wobei eine Approximation nötig ist, da $Du(\cdot,0)$ nicht definiert zu sein braucht.

(iii) *Zusatz:* Zeige analoge Abschätzungen auch für höhere Ableitungen in räumliche und zeitliche Richtungen.
Hinweis: Betrachte $|Du|^2 + t\left|D^2u\right|^2$.

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Zusatz:* Zeige, dass
$$u(x,t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}$$
mit $g^{(k)} = \frac{d^k g}{dt^k}$ und
$$g(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^\alpha}} & t > 0, \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$
für $\alpha > 1$ und $u \equiv 0$ Lösungen des Anfangswertproblems
$$\begin{cases} \dot{u} = \Delta u & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(\cdot,0) = 0 & \text{in } \mathbb{R} \end{cases}$$
sind.

Aufgabe 5. (4 Punkte) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (-\infty,\infty))$ eine Lösung von

(1)
$$u_{tt} = a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + du \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times (-\infty,\infty)$$
mit
$$\frac{1}{\lambda}\delta^{ij} \preccurlyeq a^{ij} \qquad \text{für ein } 0 < \lambda \in \mathbb{R}.$$
Seien die Koeffizienten a^{ij}, b^i, d und ihre ersten Ableitungen (bezuglich x und t) gleichmäßig beschränkt.

Zeige, dass die Differentialgleichung (1) endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit besitzt, dass heißt, dass es $V > 0$ mit $u(\cdot,0) \equiv 0$ in $B_{Vt_0}(x_0)$ impliziert $u(x_0,t_0) = 0$ für alle $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ gibt.
Hinweis: Betrachte
$$e(t) = \frac{1}{2} \int\limits_{B_{\gamma(t_0-t)}(x_0)} e^{-\mu t}\left[u_t^2 + a^{ij}u_iu_j + \kappa u^2\right]$$
für geeignete $\gamma, \mu, \kappa \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6. (2 Punkte) *Zusatz:* Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung von $\Delta u = f$. Angenommen u und alle Ableitungen von u fallen im Unendlichen schnell genug ab, um partiell integrieren zu können.

(i) Vereinfache
$$\int_{\mathbb{R}^n} |D^2u|^2 - (\Delta u)^2.$$

(ii) Folgere, dass
$$\left\|D^2u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
gilt.