Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, M. Langford
WS 2014

Universität
Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Blatt 2

Abgabe: Bis Freitag 7. November 2014, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Aufgabe 2.1 (*Verneinung*) (*2 Punkte*)
Man verneine die Aussagen:
(i) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} \left(|x| < \delta \Rightarrow |x^3| < \varepsilon \right)$.
(ii) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x_0 \in \mathbb{R} \, \forall x \in \mathbb{R} \, \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |x^2 - x_0^2| < \varepsilon \right)$.
Benutzen Sie, dass $a \geq b$ die Verneinung von $a < b$ ist und schreiben Sie die Aussage soweit um bis kein „$\neg$“ mehr auftaucht.

Aufgabe 2.2 (*Vereinigung, Durchschnitt, Komplement*) (*4 Punkte*)
Seien A und B Mengen mit fester Obermenge X. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:
(i) $\complement(\complement A) = A$ und $A \setminus B = A \cap \complement B$.
(ii) $A \cap \complement A = \emptyset$ und $A \cup \complement A = X$.
(iii) $(\complement A \cup B) \cap (A \cap \complement B) = \emptyset$ und $X = (\complement A \cup B) \cup (A \cap \complement B)$.
(iv) $(\complement A \cup \complement B) \cap (A \cap B) = \emptyset$ und $X = (\complement A \cup \complement B) \cup (A \cap B)$.

Aufgabe 2.3 (*Symmetrische Differenz*) (*6+**1** Punkte*)
Man definiert die *symmetrische Differenz* $A \Delta B$ von zwei Mengen A, B durch

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \, .$$

Seien A, B, C Mengen mit fester Obermenge X. Beweisen Sie:
(i) $A \Delta B = B \Delta A$.
(ii) $A \Delta \emptyset = A$.
(iii) $A \Delta A = \emptyset$.
(iv) $A \Delta B = (A \cup B) \cap \left(\complement A \cup \complement B \right)$.
(v) $\complement(A \Delta B) = \left(\complement A \cup B \right) \cap \left(A \cup \complement B \right)$.
(vi) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.
(vii) $(A \Delta B) \Delta (B \Delta C) = C \Delta A$.

Aufgabe 2.4 (*Kartesisches Produkt*) (*4 Punkte*)
Seien A und C Mengen mit fester Obermenge X, und B und D Mengen mit fester Obermenge Y. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:
(i) Sei $A \times B \neq \emptyset$, dann folgt $A \times B \subset C \times D \Leftrightarrow A \subset C \wedge B \subset D$.
(ii) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
(iii) $(A \times B) \setminus (C \times D) = ((A \setminus C) \times B) \cup (A \times (B \setminus D))$.
(iv) $A \times B = \emptyset$ genau dann, wenn $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$.