Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, M. Langford
WS 2014

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Blatt 3

Abgabe: Bis Freitag 14. November 2014, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Aufgabe 3.1 (*Injektivität*) (*8 Punkte*)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) f ist injektiv.

(ii) Für jede Teilmenge $A \subset X$ gilt

$$f^{-1}(f(A)) = A\,.$$

(iii) Für jedes Paar von Teilmengen $A, B \subset X$ gilt

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)\,.$$

(iv) Für jedes Paar *disjunkter* Teilmengen $A, B \subset X$ gilt

$$f(A) \cap f(B) = \emptyset\,.$$

(v) Für alle A und B mit $A \subset B \subset X$ gilt

$$f(B \setminus A) = f(B) \setminus f(A)\,.$$

Aufgabe 3.2 (*Potenzmenge*) (*2 Punkte*)

Sei A eine Menge. Finden Sie eine Bijektion zwischen $\mathcal{P}(A)$ und

$$2^A := \{f : A \to \{0,1\}\}\,,$$

der Menge aller Abbildungen f von A nach $\{0,1\}$.

Aufgabe 3.3 (*Umkehrabbildung*) (*2 Punkte*)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von Y. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i) \quad \text{und} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)\,.$$

Aufgabe 3.4 (*Äquivalenzrelationen*) (*4 Punkte*)

Sei X eine Menge. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Diagonale, $\Delta(X) \subset X \times X$, ist eine Äquivalenzrelation. (*1/2 Punkt*)

(ii) Sei $R \subset X \times X$ eine Äquivalenzrelation. Dann gilt $\Delta(X) \subset R$. (*1/2 Punkt*)

(iii) Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann ist (*2 Punkte*)

$$x \sim y :\Longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklasse $[x]$ von $x \in X$ ist $f^{-1}(\{f(x)\})$.

(iv) Sei R eine Äquivalenzrelation auf X und sei $Y \subset X$, dann ist R_Y mit $R_Y := R \cap (Y \times Y)$ eine Äquivalenzrelation auf Y. (*1 Punkt*)