Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, M. Langford
Wintersemester 2014/15

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Blatt 4

Abgabe: Bis Freitag 21. November 2014, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Aufgabe 4.1 (*Die reellen Zahlen*) (*2 Punkte*)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen über die reellen Zahlen:

(i) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass $N \leq x < N+1$ gilt.

(ii) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y + \varepsilon$ für beliebige $\varepsilon > 0$. Dann gilt $x \leq y$.

Aufgabe 4.2 (*Ungleichungen und Induktion*) (*4+**1** Punkte*)

Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

(i) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $2xy \leq x^2 + y^2$.

(ii) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon \neq 0$ gilt $2xy \leq \varepsilon^2 x^2 + y^2/\varepsilon^2$.

(iii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ gilt $1 + x^3 \geq x + x^2$.

(iii) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für alle $(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ gilt $\left(\sum_{i=1}^n x^i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n (x^i)^2$.

(iv) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $x \geq -1$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Aufgabe 4.3 (*Partielle Ordnung*) (*6 Punkte*)

Sei X eine Menge. Wir definieren eine Relation '$\leq$' auf $\mathcal{P}(X)$ durch

$$A \leq B :\Longleftrightarrow A \subset B\,.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\leq$ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Solche Relationen heißen *partielle Ordnungen*.

(ii) Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Eine Menge $B \in \mathcal{P}(X)$ für die $A \leq B$ für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt, heißt eine *obere Schranke* von $\mathcal{A}$. B heißt eine *kleinste obere Schranke* von $\mathcal{A}$, falls B eine obere Schranke von $\mathcal{A}$ ist und $B \leq C$ für jede obere Schranke C von $\mathcal{A}$ gilt. Zeigen Sie, dass eine kleinste obere Schranke für $\mathcal{A}$ existiert und eindeutig bestimmt ist. Diese Menge bezeichnen wir $\sup \mathcal{A}$.

(iii) Definieren Sie analog zur $\sup \mathcal{A}$ die *größte untere Schranke* von $\mathcal{A}$, $\inf \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass auch $\inf \mathcal{A}$ existiert und eindeutig bestimmt ist.

(iv) Finden Sie eine Menge X, sodass $\mathcal{P}(X)$ (mit der oben definierten partiellen Ordnung $\leq$) nicht total geordnet ist, d. h. es gibt Mengen $A, B \in \mathcal{P}(X)$, sodass weder $A \leq B$ noch $B \leq A$ gilt.

Aufgabe 4.4 (*Infimum und Supremum*) (*4 Punkte*)

Sei A eine nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Man definiert

$$B := \big\{ b \in \mathbb{R} \ :\ b \text{ ist eine untere Schranke für } A \big\}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\sup B = \inf A$.

(ii) Jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat eine größte untere Schranke in $\mathbb{R}$.

(iii) $\inf \big\{ 1/n \ :\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \big\} = 0$.

(iv) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \big(0, 1/n\big) \equiv \bigcap_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \big(0, 1/n\big) = \emptyset$.