Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, M. Langford
Wintersemester 2014/15

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Blatt 5

Abgabe: Bis Freitag 28. November 2014, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Aufgabe 5.1 (*Endliche Mengen*) (*4 Punkte*)

Sei A und B endliche Mengen mit $|A| = |B|$ und sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist injektiv.
(ii) f ist surjektiv.
(iii) f ist bijektiv.

Aufgabe 5.2 (*Kardinalität*) (*4 Punkte*)

Sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass X genau dann unendlich ist, wenn es eine Teilmenge $A \subsetneq X$ mit $A \sim X$ gibt.

Aufgabe 5.3 (*Summen von Potenzen*) (*4+**3** Punkte*)

Seien n, $k \in \mathbb{N}$. In dieser Aufgabe suchen wir Polynome s_k vom Grad $k+1$, so dass die Gleichung

$$\sum_{i=0}^{n} i^k = s_k(n) \tag{$*$}$$

für beliebige $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(i) Zeigen Sie, dass $s_2(x) = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$ gilt.
(ii) Finden Sie s_3 und s_4 und zeigen Sie $(*)$ für $k = 3$ und $k = 4$.
(iii) Zeigen Sie, dass es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein Polynom vom Grad $k+1$ gibt, so dass $\sum\limits_{i=0}^{n} i^k = s_k(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie für $a, b \in \mathbb{N}$ den „führenden Term“ in $(a+1)^{b+1} - a^{b+1}$.

Aufgabe 5.4 (*Binomialkoeffizienten*) (*4 Punkte*)

Seien n, $m \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{m} \in \mathbb{N}$ durch

$$\binom{n}{m} := \begin{cases} \frac{n!}{m!(n-m)!} & \text{für } m \le n \\ 0 & \text{für } m > n\,. \end{cases}$$

Für $a \in \mathbb{R}$ definieren wir weiterhin a^n rekursiv durch $a^0 := 1$ und $a^{n+1} := a \cdot a^n$.

Zeigen Sie:

(i) $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$
(ii) Für $1 \le m \le n$ gilt $\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}$.
(iii) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
(iv) $\sum\limits_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$

Bitte wenden!

(v) $\binom{n}{m} \in \mathbb{N}$

(vi) Für a, $b \in \mathbb{R}$ gilt $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Aufgabe 5.6 (*Für die Party*) (*0+**3** Punkte*)

Gegeben sei ein Stapel von n Spielkarten, die mit je genau einer natürlichen Zahl zwischen 1 und n beschriftet sind, so dass jede dieser Zahlen genau einmal vorkommt. Der Stapel sei beliebig gemischt.

Nun werden die Karten wie folgt umgeordnet: Steht auf der obersten Karte die Zahl k, so hebt man die obersten k Karten des aktuellen Stapels ab und legt sie in umgekehrter Reihenfolge wieder auf den Stapel.

Zeigen Sie, dass nach endlich vielen solchen Umordnungen die Karte mit der Zahl 1 oben liegt.