Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, M. Langford
Wintersemester 2014/15

Universität
Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Blatt 6

Abgabe: Bis Freitag 5. Dezember 2014, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Aufgabe 6.1 (*Existenz von Wurzeln*) (*4 Punkte*)

Seien $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ und $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Modifizieren Sie den Beweis aus der Vorlesung für die Existenz der Quadratwurzel und zeigen Sie so, dass es ein $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $b^k = a$ gibt. Zeigen Sie, dass b eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 6.2 (*Kardinalität II*) (*2+2 Punkte*)

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist.
(ii) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1) \sim \mathbb{R}$.

Aufgabe 6.3 (*Schubfachprinzip*) (*4 Punkte*)

(i) Seien X und Y Mengen mit $|X| > |Y|$. Zeigen Sie, dass es keine injektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt.
(ii) Seien $\rho \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $|n\rho - m| < \varepsilon$ gibt.

Aufgabe 6.4 (*Skalarprodukte*) (*6+2+2 Punkte*)

Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Sei $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf E mit induzierter Norm $||\cdot||$.

(i) Zeigen Sie, dass

$$4 \langle x\,, y \rangle = ||x + y||^2 - ||x - y||^2$$

und

$$2 \left(||x||^2 + ||y||^2 \right) = ||x + y||^2 + ||x - y||^2$$

für alle $x, y \in E$ gelten.

Sei nun $|||\cdot|||$ eine Norm für E, die

$$2 \left(|||x|||^2 + |||y|||^2 \right) = |||x + y|||^2 + |||x - y|||^2$$

für alle $x, y \in E$ erfüllt. Definiere eine Form $\langle\langle \cdot\,, \cdot \rangle\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ durch

$$4 \langle\langle x\,, y \rangle\rangle := |||x + y|||^2 - |||x - y|||^2 \,.$$

(iii) Zeigen Sie, dass $\langle\langle \cdot\,, \cdot \rangle\rangle$ symmerisch und positiv definit ist.
(iv) Zeigen Sie, dass $\langle\langle \cdot\,, \cdot \rangle\rangle$

$$\langle\langle x + y\,, z \rangle\rangle = \langle\langle x\,, z \rangle\rangle + \langle\langle y\,, z \rangle\rangle$$

für alle $x, y, z \in E$ erfüllt.

(v) Zeigen Sie, dass $||\cdot||_{\ell^4(\mathbb{R}^4)}$ nicht von einem Skalarprodukt wie in Theorem 2.9 induziert ist.

Bitte wenden!

(vi) Zeigen Sie, dass für alle $\lambda \in \mathbb{Q}$ und alle $x, y \in E$
$$\langle\langle \lambda x \, , \, y \rangle\rangle = \lambda \, \langle\langle x \, , \, y \rangle\rangle$$
gilt.
Hinweise: Betrachte erst der Fall $\lambda \in \mathbb{N}$.

(vii) Zeigen Sie, dass $\langle\langle \cdot \, , \, \cdot \rangle\rangle$
$$\langle\langle x \, , \, y \rangle\rangle^2 \leq |||x|||^2 \, |||y|||^2$$
für alle $x, y \in E$ erfüllt.