Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, M. Langford
Wintersemester 2014/15

Universität
Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Blatt 7

Abgabe: Bis Freitag 12. Dezember 2014, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Aufgabe 7.1 (*Konvergenz und Potenzen*) (*4 Punkte*)

(i) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $|a| < 1$. Zeigen Sie, dass $a^n \to 0$ für $n \to \infty$ gilt.
(ii) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Zeigen Sie, dass $\sqrt[n]{a} \to 1$ für $n \to \infty$ gilt.

Aufgabe 7.2 (*Konvergenz von Partialsummen und Produkten*) (***1***+*4 Punkte*)

Sei E ein normierter Raum und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Limes a.

(i) Zeigen Sie, dass
$$s_k := \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} a_n \to a$$
für $k \to \infty$ gilt.

(ii) Beweisen Sie **(i)** im Spezialfall $E = \mathbb{R}$.

Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Zeigen Sie, dass auch
$$p_k := \left(\prod_{n=1}^{k} a_n\right)^{1/k} \to a$$
für $k \to \infty$ gilt.
Hinweis: Wir haben den Logarithmus noch nicht behandelt.

Aufgabe 7.3 (*Skalarprodukte II*) (*4 Punkte*)

(i) Für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ ist durch
$$\langle x, y\rangle \equiv \left\langle \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} \right\rangle := x^1y^1 + \alpha x^1y^2 + \alpha x^2y^1 + 4x^2y^2$$
ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert?

(ii) Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a = (a^i)_{1\le i\le n}$ und $b = (b^i)_{1\le i\le n}$. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nicht negative reelle Zahlen. Beweisen Sie
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a^i b^i \le \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a^i)^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (b^i)^2\right)^{1/2}.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 7.4 (*Höldersche Ungleichung*) (*4 Punkte*)

(i) Sei $\left(a^1, \dots, a^{2^k}\right) \in \mathbb{R}^{2^k}$. Zeigen Sie, dass

$$\prod_{i=1}^{2^k} a^i \le \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{2^k} (a^i)^{2^k}$$

gilt.

(ii) Beweisen Sie Theorem 2.14 im Fall $p = \frac{2^k}{n}$ mit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < n < 2^k$. Zeigen Sie dazu insbesondere, dass

$$ab \le \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $p = \frac{2^k}{n}$ sowie $q = \frac{2^k}{2^k - n}$ gilt.

Hinweis: Da wir die Konvexität der Exponentialfunktion noch nicht benutzen dürfen, benutzen wir hier stattdessen vollständige Induktion.