Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, M. Langford
Wintersemester 2014/15

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Blatt 8

Abgabe: Bis Freitag 19. Dezember 2014, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Aufgabe 8.1 (*Limes und Wurzeln*) (*2 Punkte*)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ eine konvergente Folge mit $a_n \to a \geq 0$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$ für $n \to \infty$ gilt.

Aufgabe 8.2 (*Rekursiv definierte Folge*) (*4+**2** Punkte*)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ die rekursiv durch

$$X_0 := 2 \qquad \text{und}$$

$$X_{n+1} := \frac{\frac{1}{2}X_n^2 + 1}{X_n} \quad \text{für } n \geq 0$$

definierte Folge.

(i) Zeigen Sie, dass $X_n^2 \geq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt.
(ii) Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.
(iii) Folgern Sie, dass die Folge konvergiert und bestimmen Sie ihren Limes.
(iv) Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für *jedes* X_0 mit $X_0 \neq 0$ konvergiert. Bestimmen Sie den Limes.

Aufgabe 8.3 (*Verallgemeinerte Höldersche Ungleichung*) (*6 Punkte*)
Seien $a_i \in \mathbb{R}^n$ mit $a_i = ({a_i}^j)_{j=1\ldots n} = ({a_i}^1, \ldots, {a_i}^n)$ für $i = 1, \ldots, k$ und seien $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}_{>1}$ mit $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_k} = 1$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \prod_{i=1}^{k} {a_i}^j \right| \leq \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} \left|{a_i}^j\right|^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_i}}$$

gilt.
Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass es für jedes $i = 1, \ldots, k$ ein $N \in \mathbb{N}_{>0}$ und ein $n_i \in \{1, \ldots, 2^N\}$ mit $p_i = 2^N/n_i$ gibt.

Aufgabe 8.4 (*Produkträume*) (***1**+4 Punkte*)
Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume.

(i) Zeigen Sie, dass $d_{X\times Y} : X \times Y \to \mathbb{R}_+$ mit

$$d_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

eine Metrik auf dem Produktraum $X \times Y$ definiert.
(ii) Zeigen Sie **(i)** im Spezialfall $X = Y = \mathbb{R}$ und $d_1(x, y) = d_2(x, y) := |x - y|$.