Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, M. Langford
Wintersemester 2014/15

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Blatt 9

Abgabe: Bis Freitag 16. Januar 2015, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Aufgabe 9.1 (*Metrik*) (*4 Punkte*)

Zeigen Sie, dass

$$d(x,y) := \sqrt{|x-y|}$$

eine Metrik $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ definiert.

Aufgabe 9.2 (*Grenzwerte von Zahlenfolgen*) (*8 Punkte*)

Bestimmen Sie die Grenzwerte oder zeigen Sie, dass die Folge nicht konvergiert.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n} \right)$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}}$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n}$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n - \sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n+2} \right)$

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ für reelle $a, b > 0$

(vi) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n^3-2}$

(vii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n! + n^2}{2n! + n}$

(viii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^n}{2}$

Aufgabe 9.3 (*Eigenschaften von Funktionen*) (*4 Punkte*)

(i) Finden Sie eine nichtkonstante Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die

$$|f(x) - f(y)| \le |x-y| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}\,.$$

gilt.

(ii) Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte

$$|f(x) - f(y)| \le |x-y|^2 \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Bitte wenden!

Weihnachtspunkte

Aufgabe 9.4 (*Definitionen*) (*2 Punkte*)

Definieren Sie die folgenden Begriffe:

(i) Supremum/Infimum einer Menge reellen Zahlen
(ii) Konvergenz einer Folge/Reihe
(iii) Cauchyfolgen
(iv) Vollständigkeit eines metrischen Raums

Aufgabe 9.5 (*Reelle Potenzen*) (*6 Punkte*)

Seien $x, r \in \mathbb{R}$, $x > 0$, reelle Zahlen.

(i) Zeigen Sie, dass eine Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ rationaler Zahlen mit $q_n \to r$ für $n \to \infty$ existiert.
(ii) Sei $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ eine Folge rationaler Zahlen mit $q_n \to r$. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := x^{q_n}$ konvergiert.
(iii) Definiere ${}^r x := \lim\limits_{n\to\infty} x^{q_n}$. Zeigen Sie, dass ${}^r x$ wohldefiniert ist, d. h. ${}^r x$ ist von der Auswahl der Folge $q_n \to r$ unabhängig.
(iv) Zeigen Sie, dass ${}^r x = x^r$ für $r \in \mathbb{Q}$ gilt. Daher definieren wir $x^r := {}^r x$ für $r \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 9.6 (*Eigenschaften von Potenzen*) (*4 Punkte*)

Seien $x, a, b \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften:

(i) $x^a \in \mathbb{R}_+$
(ii) $x^a x^b = x^{a+b}$
(iii) $(x^a)^b = x^{ab}$
(iv) $x^{-a} = 1/x^a$

Aufgabe 9.7 (*Kontraktionen*) (*4 Punkte*)

Die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die *Kontraktionseigenschaft*

$$|f(x) - f(y)| \le c \cdot |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

mit einer reellen Zahl $0 \le c < 1$.

Ein Punkt $x \in \mathbb{R}$ heißt *Fixpunkt* von f, falls $f(x) = x$ gilt.

Sei nun $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch

$$\begin{aligned} x_1 &:= f(x_0) \quad \text{und} \\ x_{n+1} &:= f(x_n) \quad \text{für alle } n \ge 1 \end{aligned}$$

definierte Folge.

(i) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist und folgern Sie, dass sie konvergiert.
(ii) Folgern Sie weiter, dass $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ein Fixpunkt von f sein muss.
(iii) Zeigen Sie, dass f keinen weiteren Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 9.8 (*Umordnung*) (*4 Punkte*)

Betrachte die Reihe

$$((a_n))_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Eine Reihe $((b_i))_{i\in\mathbb{N}}$ heißt eine *Umordnung* von $((a_i))_{i\in\mathbb{N}}$, falls es eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $b_i = a_{\varphi(i)}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gibt.

Bitte wenden!

(i) Finden Sie eine konvergente Umordnung von $((a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ die nicht absolut konvergiert.
(ii) Finden Sie eine Umordnung von $((a_n))_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen 2015 konvergiert.
(iii) Finden Sie eine nicht konvergente Umordnung von $((a_n))_{n\in\mathbb{N}}$, sodass für alle Partialsummen $s_k := \sum_{n=1}^{k} a_k$ die Ungleichung $|s_k| < 10$ gilt.
(iv) Zeigen Sie, dass eine Umordnung von $((a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_k \to \infty$ für $k \to \infty$ existiert.

Aufgabe 9.9 (*Vollständigkeit*) (***8*** *Punkte*)

Das *Intervallschachtelungsprinzip* besagt:

„*Jede Folge* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von Intervallen* $I_n := [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ *mit* $-\infty < a_n < b_n < \infty$ *und* $I_{n+1} \subset I_n$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *besitzt einen nichtleeren Durchschnitt*".

(i) Leiten Sie das Intervallschachtelungsprinzip aus dem Satz über monotone Folgen (Proposition 2.26) her.
(ii) Leiten Sie das Vollständigkeitsaxiom (Definition 1.44 (C)) aus dem Intervallschachtelungsprinzip her.
(iii) Beweisen Sie den Satz über monotone Folgen mit Hilfe des Satzes von Bolzano–Weierstraß (Korollar 2.33).
(iv) Beweisen Sie den Satz von Bolzano–Weierstraß mit Hilfe des Cauchyschen Konvergenzkriteriums (Definition 2.41 (ii)).

Also sind folgende fünf Aussagen äquivalent:

(1) Jede monotone, beschränkte Folge reeller Zahlen konvergiert (Satz über monotone Folgen, Proposition 2.26).
(2) Jede Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von nichtleeren, beschränkten Intervallen $I_n := [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ mit $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ hat einen nichtleeren Durchschnitt (Intervallschachtelungsprinzip).
(3) Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge von reellen Zahlen hat eine kleinste obere Schranke (Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen).
(4) Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge (Satz von Bolzano–Weierstraß, Korollar 2.33).
(5) Jede reelle Cauchyfolge konvergiert (Cauchyfolgenkriterium, Definition 2.41 (ii)).

Aufgabe 9.10 (*Die Einheitskugel einer Norm*) (***5*** *Punkte*)

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge mit $B_r(0) \subset K$ für ein $r > 0$, wobei $B_r(0)$ eine Kugel bezüglich der euklidischen Norm ist. Nehme weiter an, dass K *konvex* ist, d. h. aus $x, y \in K$ und $t \in [0, 1]$ folgt $tx + (1-t)y \in K$. Nehme schließlich an, dass K *symmetrisch* ist, d. h. aus $x \in K$ folgt $-x \in K$.

Definiere für $x \in \mathbb{R}^n$

$$N(x) := \inf\{r > 0 : r^{-1}x \in K\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass N eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert.
(ii) Sei $||\cdot||$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$ und definiere

$$C := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < 1\}.$$

Zeigen Sie, dass C konvex und symmetrisch ist und dass es ein $r > 0$ mit $B_r(0) \subset C$ gibt.
(iii) Sei nun $(E, ||\cdot||)$ ein beliebiger normierter Raum. Zeigen Sie, dass $\{x \in E : ||x|| < 1\}$ konvex und symmetrisch ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 9.11 (*Ein Weihnachtsrätsel*[1]) (***6** Punkte*)

Abzählbar viele Mathematiker, die in einer Reihe auf den Plätzen $0, 1, 2, \ldots$ stehen, haben sich eine Strategie ausgedacht, so dass das folgende Experiment klappt:

Auf der Stirn jedes Mathematikers erscheint gleichzeitig jeweils genau eine beliebige reelle Zahl. Zuerst dürfen alle einen Augenblick lang die reellen Zahlen aller anderen Personen sehen, jedoch nicht die auf ihrer eigenen Stirn und keinerlei Informationen austauchen. Nun versuchen alle gleichzeitig, die Zahl auf ihrer eigenen Stirn zu sagen. Das gelingt auch fast allen Mathematikern.

Geben Sie eine mögliche mathematische Strategie an, so dass dieses Experiment stets funktioniert und zeigen Sie das.

Frohe Weihnachten und ein Glückliches neues Jahr wünschen Ihnen O. Schnürer, M. Langford und die Tutoren der Vorlesung Analysis I

[1]Für die erste korrekte Lösung dieser Aufgabe, die an `mathew.langford@uni-konstanz.de` gesendet wird, gibt es einen kleinen Preis. (Der Rechtsweg ist ausgeschlossen!)