Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, M. Langford
Wintersemester 2014/15

Universität Konstanz

## Übungen zur Vorlesung Analysis I

## Blatt 10

**Abgabe:** Bis Freitag 23. Januar 2015, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

**Aufgabe 10.1** (*Trigonometrische Reihen*) (*8+2 Punkte*)

Die Exponential-, Sinus- und Cosinusfunktionen sind durch

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{und} \quad \cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}$$

definiert.

(i) Zeigen Sie direkt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = 0$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass die Reihen $\exp(x)$, $\sin(x)$ und $\cos(x)$ den Konvergenzradius $r = \infty$ haben.

(iii) Zeigen Sie, dass $\exp(x) > 1$ für $x > 0$ und $0 < \exp(x) < 1$ für $x < 0$ gelten.

(iv) Zeigen Sie, mit Hilfe der Cauchyschen Produktformel, dass

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
*Hinweis: Sie dürfen die Identität $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} = 0$ verwenden.*

(v) Folgern Sie, dass $|\sin x| \le 1$ und $|\cos x| \le 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten.

**(vi)** Beweisen Sie, z.B. mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes, die folgenden Identitäten:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \text{und} \quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y\,.$$

**Aufgabe 10.2** (*Die Supremumsnorm*) (*8 Punkte*)

Sei $A$ eine Menge und $\mathrm{Abb}(A;\mathbb{R})$ der Vektorraum aller Abbildungen $f : A \to \mathbb{R}$ mit punktweise definierter Addition und Skalarmultiplikation. Wir definieren

$$L^\infty(A) := \left\{ f \in \mathrm{Abb}(A;\mathbb{R}) : \sup_{x\in A} |f(x)| < \infty \right\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $L^\infty(A)$ ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(A;\mathbb{R})$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $(L^\infty(A), ||\cdot||_{L^\infty(A)})$ mit

$$||f||_{L^\infty(A)} := \sup_{x\in A} |f(x)|$$

ein Banachraum ist.

(iii) Berechnen Sie $||f||_{L^\infty(A)}$ für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := 2 - \mathrm{e}^{-x^2}$. Gibt es $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = ||f||_{L^\infty(A)}$?

**Bitte wenden!**

(iv) Wir definieren für $y \in \mathbb{R}$ Funktionen $f_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_y(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq y \\ \mathrm{e}^{x-y} & \text{für } x < y\,. \end{cases}$$

Sei $R > 0$. Zeigen Sie, dass $\left|\left|f_y|_{[-R,R]}\right|\right|_{L^\infty([-R,R])} \to 0$ für $y \to \infty$ und $||f_y||_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gelten.

**Aufgabe 10.3** (*Geschachtelte $\ell^p$-Räume*) (*4 Punkte*)

Seien $1 \leq p < q \leq \infty$.

(i) Zeigen Sie, dass

$$\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$$

gilt.

(ii) Zeigen oder widerlegen Sie, dass es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$||x||_{\ell^p(\mathbb{N})} \leq c \cdot ||x||_{\ell^q(\mathbb{N})}$$

für alle $x = \left(x^i\right)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N}) \cap \ell^q(\mathbb{N})$ gibt.

(iii) Zeigen oder widerlegen Sie, dass es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit

$$||x||_{\ell^q(\mathbb{N})} \leq C \cdot ||x||_{\ell^p(\mathbb{N})}$$

für alle $x = \left(x^i\right)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N}) \cap \ell^q(\mathbb{N})$ gibt.

(iv) Beantworten Sie für alle gültigen Ungleichungen von oben: Was ist die optimale, d. h. minimale, Konstante, so dass die Ungleichung gilt?

*Hinweis: Sie können für den Spezialfall $p, q \in \{1, 2, \infty\}$ bereits **3** Punkte erhalten.*