Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, M. Langford
Wintersemester 2014/15

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Blatt 11

Abgabe: Bis Freitag 30. Januar 2015, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Aufgabe 11.1 (*Weitere Reihen*) (*4 Punkte*)

(i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Zeigen Sie:
Konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ absolut.

(ii) Definiere $s := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3}{4}s$$

gilt.

Aufgabe 11.2 (*Hölderräume*) (*6+2+2 Punkte*)

Sei $\mathrm{Abb}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ der Vektorraum aller Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit punktweise definierter Addition und Skalarmultiplikation. Sei weiter $\alpha \in (0,1]$. Wir definieren

$$C^\alpha(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R};\mathbb{R}) : \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{x\neq y\in\mathbb{R}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $||\cdot||_{C^\alpha(\mathbb{R})}$ mit

$$||f||_{C^\alpha(\mathbb{R})} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{x\neq y\in\mathbb{R}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

eine Norm auf $C^\alpha(\mathbb{R})$ definiert.

Betrachte für jedes $y \in \mathbb{R}$ die Funktion $f_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_y(x) := \sqrt{|x-y|}\,.$$

(ii) Zeigen Sie, dass f_y für $y \to 0$ punktweise gegen f_0 konvergiert:
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|f_y(x) - f_0(x)| \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

(ii) Zeigen Sie, dass f_y für $y \to 0$ in L^∞ gegen f_0 konvergiert:
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$||f_y - f_0||_{L^\infty(\mathbb{R})} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_y(x) - f_0(x)| \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

(iv) Gilt $\lim\limits_{y\to 0} ||f_y - f_0||_{C^\alpha(\mathbb{R})} = 0$?

(v) Gibt es eine abzählbare Teilmenge $A \subset C^\alpha(\mathbb{R})$ mit $\overline{A} = C^\alpha(\mathbb{R})$?

Bitte wenden!

Aufgabe 11.4 (*Unterhalbstetigkeit*) (*6+**1**+**2** Punkte*)

Betrachten Sie

$$\mathcal{O} := \{(a,\infty) : a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,\infty\}\}\,.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}$ eine Topologie auf $\mathbb{R}$ ist.

(ii) Sei $E = \mathbb{R}$ der metrische Raum der reellen Zahlen mit der Euklidischen Metrik. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : E \to (\mathbb{R}, \mathcal{O})$ genau dann als topologische Abbildung stetig ist, wenn

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x_0)$$

für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ mit $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ gilt.

(iii) Zeigen Sie (ii) im Falle eines beliebigen metrischen Raumes E.

(iv) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge gleichmäßig beschränkter unterhalbstetiger Abbildungen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass die durch

$$f(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$

definierte Abbildung $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ unterhalbstetig ist.