Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, M. Langford
Wintersemester 2014/15

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Blatt 12

Abgabe: Bis Freitag 6. Februar 2015, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Aufgabe 12.1 (*Stetige Funktionen*) (*4 Punkte*)

Betrachten Sie die durch

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\to \mathbb{R}_{\geq 1} \\ x &\mapsto x^2+1 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} g:\mathbb{R}_{\geq 1} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x-1} \end{aligned}$$

definierte Funktionen.

(i) Zeigen Sie, dass f und g stetig sind.
(ii) Welche der Funktionen f und g sind gleichmäßig stetig?
(iii) Ist $g \circ f$ stetig? Ist $g \circ f$ gleichmäßig stetig?

Aufgabe 12.2 (*Eigenschaften von Funktionen*) (*5+3+2 Punkte*)

(a) Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Funktion. Beschreiben Sie in Worten, ggf. unter Verwendung unserer bisherigen Definitionen, was die folgenden Aussagen bedeuten (ohne die Quantoren nur in Worten auszuschreiben) und geben Sie jeweils (ohne Beweis) ein Beispiel an, das möglichst wenige der anderen Aussagen ebenfalls erfüllt.

(i) $\underset{x_0\in\mathbb{R}}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}\ |x-x_0|<\delta \implies |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

(ii) $\underset{x_0\in\mathbb{R}}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}\ |x-x_0|>\delta \implies |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

(iii) $\underset{x_0\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{\varepsilon>0}{\exists}\ \underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{x\in\mathbb{R}}{\exists}\ |x-x_0|<\delta \wedge |f(x)-f(x_0)|>\varepsilon$

(iv) $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x,y\in\mathbb{R}}{\forall}\ |x-y|<\delta \implies |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

(v) $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x,y\in\mathbb{R}}{\forall}\ |f(x)-f(y)|<\frac{\delta}{\varepsilon}$

(vi) $\underset{x_0\in\mathbb{R}}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}\ x_0<x<x_0+\delta \implies |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

(vii) $\underset{x_0\in\mathbb{R}}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\exists}\ \underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{x\in\mathbb{R}}{\exists}\ |x-x_0|<\delta \wedge |f(x)-f(x_0)|>\varepsilon$

(viii) $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x,y\in\mathbb{R}}{\forall}\ \min\{|x|,|y|\}>\delta \implies |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

(b) Zeigen Sie für zwei der von Ihnen angegebenen Funktionen, dass diese die behaupteten Eigenschaften besitzen.

Aufgabe 12.3 (*Eigenschaften von Funktionen*) (*4 Punkte*)

Zeigen Sie sämtliche in der Definition der Stetigkeit (Definition 3.25 (i) und (ii)) behaupteten Äquivalenzen, die wir nicht in Theorem 3.27 gezeigt haben.

Bitte wenden!

Aufgabe 12.4 (*Inneres, Abschluss und Rand einer Menge*) (*3+**1** Punkte*)

(i) Beweisen Sie die Aussagen der Beispiele 3.13 (i)–(iii).

(iv) Sei $E := (0, 2] \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $(1, 2] \subset E$ offen und $(0, 1]$ abgeschlossen sind.
Hinweis: Benutzen Sie die von $\mathbb{R}$ *induzierte Topologie oder Metrik.*