Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, M. Langford
Wintersemester 2014/15

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Blatt 12

Abgabe: Bis Freitag 6. Februar 2015, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Aufgabe 12.1 (*Stetige Funktionen*) (*4 Punkte*)

Betrachten Sie die durch

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_{\geq 1} \\ x &\mapsto x^2 + 1 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} g : \mathbb{R}_{\geq 1} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x-1} \end{aligned}$$

definierte Funktionen.

(i) Zeigen Sie, dass f und g stetig sind.

(ii) Welche der Funktionen f und g sind gleichmäßig stetig?

(iii) Ist $g \circ f$ stetig? Ist $g \circ f$ gleichmäßig stetig?

Lösung. (i) – Betrachte erst die Funktion f: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ fest und $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Beachte, dass

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |x^2 - x_0^2| \\ &= |x - x_0||x + x_0| \\ &= |x - x_0||x - x_0 + 2x_0| \\ &\leq |x - x_0|(|x - x_0| + 2|x_0|)\,. \end{aligned}$$

Sei $|x - x_0| < \delta$, dann gilt

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \delta^2 + 2\delta|x_0|\,.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wollen $\delta > 0$ so wählen, dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$. Eine mögliche Auswahl ist

$$\delta \equiv \delta(\varepsilon, |x_0|) := \min \left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, \frac{\varepsilon}{4|x_0|} \right\},$$

da in diesem Fall gilt

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \delta^2 + 2\delta|x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

– Betrachte nun die Funktion g: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Beachte, dass

$$|f(x) - f(x_0)| = |\sqrt{x-1} - \sqrt{x_0 - 1}|\,.$$

Wir wissen (aus Aufgabe 9.1), dass $d(x, y) := \sqrt{|x - y|}$ eine Metrik definiert, so dass (wegen der Umgekehrten Dreiecksungleichung) es

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{x - y}$$

für alle x, $y \in \mathbb{R}$ gilt. Wir folgern

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |\sqrt{x - 1 - (x_0 - 1)}| = |\sqrt{x - x_0}|\,.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ folgt

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \sqrt{\delta}\,.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wollen $\delta > 0$ so wählen, dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$. In diesem Fall wählen wir einfach $\delta \equiv \delta(\varepsilon) := \varepsilon^2$, so dass

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \sqrt{\delta} = \varepsilon \,.$$

(ii) – Da δ im zweiten Fall nicht von x_0 abhängt, ist die Funktion g gleichmäßig stetig.
– Dies gilt für f nicht: Sei $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $x_0 > 0$ und sei $x := x_0 + \delta$. Wir wollen $x_0 \equiv x_0(\delta)$ so groß machen, dass $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$. Beachte, dass

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0| = \delta|2x_0 + \delta| > 2\delta|x_0| \,.$$

Sei $x_0 > \frac{1}{2\delta}$, dann gilt

$$|f(x) - f(x_0)| > 1 \,.$$

Wir haben gezeigt, dass es für jedes $\delta > 0$ ein Paar x, $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ und $|f(x) - f(x_0)| > 1$ existiert. Dies widerspricht die gleichmäßige Stetigkeit.

(iii) $f \circ g$ ist gleichmäßig stetig: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und sei $\delta := \varepsilon$. Dann gilt

$$|x - x_0| < \delta \implies |f \circ g(x) - f \circ g(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$$

für alle x, $x_0 \in \mathbb{R}$.

□

Aufgabe 12.2 (*Eigenschaften von Funktionen*) (*5+****3****+****2*** *Punkte*)

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beschreiben Sie in Worten, ggf. unter Verwendung unserer bisherigen Definitionen, was die folgenden Aussagen bedeuten (ohne die Quantoren nur in Worten auszuschreiben) und geben Sie jeweils (ohne Beweis) ein Beispiel an, das möglichst wenige der anderen Aussagen ebenfalls erfüllt.

(i) $\underset{x_0 \in \mathbb{R}}{\forall} \; \underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; \underset{\delta > 0}{\exists} \; \underset{x \in \mathbb{R}}{\forall} \; |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

(ii) $\underset{x_0 \in \mathbb{R}}{\forall} \; \underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; \underset{\delta > 0}{\exists} \; \underset{x \in \mathbb{R}}{\forall} \; |x - x_0| > \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

(iii) $\underset{x_0 \in \mathbb{R}}{\exists} \; \underset{\varepsilon > 0}{\exists} \; \underset{\delta > 0}{\forall} \; \underset{x \in \mathbb{R}}{\exists} \; |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$

(iv) $\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; \underset{\delta > 0}{\exists} \; \underset{x, y \in \mathbb{R}}{\forall} \; |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

(v) $\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; \underset{\delta > 0}{\exists} \; \underset{x, y \in \mathbb{R}}{\forall} \; |f(x) - f(y)| < \frac{\delta}{\varepsilon}$

(vi) $\underset{x_0 \in \mathbb{R}}{\forall} \; \underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; \underset{\delta > 0}{\exists} \; \underset{x \in \mathbb{R}}{\forall} \; x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

(vii) $\underset{x_0 \in \mathbb{R}}{\forall} \; \underset{\varepsilon > 0}{\exists} \; \underset{\delta > 0}{\forall} \; \underset{x \in \mathbb{R}}{\exists} \; |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$

(viii) $\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; \underset{\delta > 0}{\exists} \; \underset{x, y \in \mathbb{R}}{\forall} \; \min\{|x|, |y|\} > \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

(b) Zeigen Sie für zwei der von Ihnen angegebenen Funktionen, dass diese die behaupteten Eigenschaften besitzen.

Lösung. (a) (i) f ist stetig. Z.B. $f(x) = 27$, x, x^2, $\sin x$, e^x, $\frac{1}{1+x^2}$, ...

(ii) f ist konstant: Sei $\varepsilon > 0$, x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$. Es gibt $\delta \equiv \delta(\varepsilon, x_1, x_2) > 0$, so dass

$$\begin{aligned}
|f(x_2) - f(x_1)| &= |f(x_2) - f(x) + f(x) - f(x_1)| \\
&\leq |f(x_2) - f(x)| + |f(x) - f(x_1)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\min\{|x_2 - x|, |x_1 - x|\} > \delta$. Da solche x existieren (nehme z.B. $-x := |x_1| + |x_2| + \delta$) gilt $f(x_1) = f(x_2)$.

(iii) f ist nicht stetig. Z.B.

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x > 0\,, \end{cases}$$

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,, \ldots . \end{cases}$$

(iv) f ist gleichmäßig stetig. Z.B. $f(x) = 27$, x, $\sqrt{|x|}$, $\frac{1}{1+x^2}$, $\sin x$, ...

(v) f ist beschränkt. Z.B. $f(x) = 27$, $\frac{1}{1+x^2}$, $\sin x$, ...

(vi) f ist „rechseitig stetig“(beachte, dass „rechseitig stetig“+ „linkseitig stetig“= stetig). Z.B.

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0\,. \end{cases}$$

(vii) f ist „nirgendwo stetig“(für alle $x \in \mathbb{R}$ ist f nicht stetig im Punkt x). Z. B.

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,, \ldots . \end{cases}$$

(viii) f besitzt einen Grenzwert für $x \to \infty$ (Der Limes $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ existiert). Z. B. $f(x) = 27$, $\frac{1}{1+x^2}$, ...

(b) (i) Wir betrachten $f(x) = x^2$. Stetigkeit haben wir in der Aufgabe 12.1 (i) gezeigt.

(ii) Wir betrachten $f(x) \equiv 27$. Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ beliebig. Dann gilt $|f(x) - f(y)| = |27 - 27| = 0 < \varepsilon$.

(iii) f ist nicht stetig. Wir betrachten

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0\,. \end{cases}$$

Sei $x_0 := 0$ und $x := x_0 - \delta/2$ (für $\delta > 0$ beliebig). Dann gilt $|x - x_0| < \delta$ und $|f(x) - f(x_0)| \geq 1$.

(iv) Wir betrachten $f(x) = \sqrt{x}$. Gleichmäßige Stetigkeit haben wir in der Aufgabe 12.1 (i) gezeigt.

(v) Wir betrachten $f(x) := \sin x$. Wir haben in der Aufgabe 10.1 (iv) gezeigt, dass $|\sin x| \leq 1$.

(vi) Wir betrachten

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x > 0\,. \end{cases}$$

Da f stetig in allen Punkten $x_0 \neq 0$ ist, betrachten wir nur $x_0 = 0$. Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta := 1$ und betrachte $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < \delta = 1$. Dann gilt $|f(x) - f(0)| = |1 - 1| = 0 < 1$. Somit ist f „rechtseitig stetig“.

(vii) Wir betrachten

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Nehme an, dass f in irgendeinem Punkt $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig ist. D. h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Insbesondere dürfen wir $\varepsilon = 1/2$ nehmen. Aber, da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, gibt es für jedes $\delta > 0$ ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $|x_0 - x| < \delta$. Es folgt $|f(x) - f(x_0)| = |1 - 0| = 1 > \varepsilon$, ein Widerspruch. Wenn $x_0 \in \mathbb{Q}$ ist, gehen wir ähnlich vor.

(viii) Wir betrachten $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann für $|x| > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ gilt $1 + x^2 > \frac{1}{\varepsilon}$, so dass $|\frac{1}{1+x^2} - 0| < \varepsilon$. Somit besitzt f den Limes 0 für $|x| \to \infty$.

$\square$

Aufgabe 12.3 (*Eigenschaften von Funktionen*) (*4 Punkte*)

Zeigen Sie sämtliche in der Definition der Stetigkeit (Definition 3.25 (i) und (ii)) behaupteten Äquivalenzen, die wir nicht in Theorem 3.27 gezeigt haben.

Lösung. (i) Seien (E, d_E), (F, d_F) metrische Räume. Eine Abbildung $f : E \to F$ heißt *ε-δ-stetig* im Punkt $x_0 \in E$, falls

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in E}{\forall}\ d_E(x,x_0) < \delta \implies d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\,.$$

Beachte, dass

$$\Big(d_E(x,x_0) < \delta \implies d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\Big) \iff \Big(x \in B_\delta(x_0) \implies f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))\Big)$$
$$\iff f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))\,.$$

D. h. eine Abbildung $f : E \to F$ ist ε-δ-stetig im Punkt $x_0 \in E$ genau dann, wenn

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in E}{\forall}\ f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))\,.$$

(ii) Die Abbildung f heißt *als topologische Abbildung stetig* im Punkt $x_0 \in E$, falls

$$\underset{V\in\mathcal{U}(f(x_0))}{\forall}\ \underset{U\in\mathcal{U}(x_0)}{\exists}\ f(U) \subset V\,.$$

Beachte, dass

$$f(U) \subset V \iff \underset{u\in U}{\forall} f(u) \in V$$
$$\iff U \subset f^{-1}(V) := \{z \in E : f(z) \in V\}\,.$$

Anderseits gilt

$$\underset{U\in\mathcal{U}(x)}{\exists}\ U \subset W \iff W \in \mathcal{U}(x)\,,$$

da

$$U \in \mathcal{U}(x) \iff \underset{O \text{ offen}}{\exists}\ x \in O \subset U\,.$$

Wir folgern, dass die Abbildung f genau dann als topologische Abbildung stetig im Punkt $x_0 \in E$ ist, wenn

$$\underset{V\in\mathcal{U}(f(x_0))}{\forall}\ f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x_0)\,.$$

□

Aufgabe 12.4 (*Inneres, Abschluss und Rand einer Menge*) (*3+**1** Punkte*)

(i) Beweisen Sie die Aussagen der Beispiele 3.13 (i)–(iii).

(iv) Sei $E := (0,2] \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $(1,2] \subset E$ offen und $(0,1]$ abgeschlossen sind.
Hinweis: Benutzen Sie die von $\mathbb{R}$ induzierte Topologie oder Metrik.

Lösung. (i) Betrachte die Menge $A := [a,b)$ aus Beispiel 3.13 (i). Aus Propositionen 3.9 und 3.11 folgern wir

$$(a,b) = \bigcup_{\varepsilon>0}(a+\varepsilon, b-\varepsilon) \subset \operatorname{int}(A) \subset A \subset \overline{A} \subset \bigcap_{\varepsilon>0}[a-\varepsilon, b+\varepsilon] = [a,b]\,.$$

Da $(a,b) \subset \operatorname{Int}(A) \subset A = (a,b]$ gilt $\operatorname{Int}(A) = (a,b)$ (da $\operatorname{int}(A)$ offen ist). Da $(a,b] \subset \overline{A} \subset [a,b]$ gilt $\overline{A} = [a,b]$ (da $\overline{A}$ abgeschlossen ist). Somit gilt auch $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int}(A) = \{a,b\}$.

(ii) Betrachte die Menge $A := B_r(x_0)\dot\cup\{a\} \subset \mathbb{R}^n$ mit $|a - x_0| > r$ aus Beispiel 3.13 (ii). Aus Proposition 3.12 folgern wir

$$\overline{A} := \overline{B_r(x_0) \cup \{a\}} = \overline{B_r(x_0)} \cup \overline{\{a\}} = \overline{B}_r(x_0) \cup \{a\}\,.$$

Aus Proposition 3.9 folgern wir $B_r(x_0) \subset \operatorname{int}(A) \subset A = B_r(x_0) \cup \{a\}$. Sei $y \in \operatorname{int}(A) \setminus B_r(x_0)$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon << |x_0 - a| - r$ und $B_\varepsilon(y) \cap A = B_\varepsilon(y)$. Anderseits gilt $B_\varepsilon(a) \cap A = \{a\}$, so dass $y \neq a$. Dies widerspricht $\operatorname{int}(A) \setminus B_r(x_0) =$

$\{a\}$ und wir folgern $\mathrm{int}(A) \setminus B_r(x_0) = \emptyset$. Wir schließen $\mathrm{int} A = B_r(x_0)$ und folgern $\partial\, A = \overline{A} \setminus \mathrm{A} = \mathbb{S}_r(x_0) \cup \{a\}$.

(iii) Sei E ein beliebiger metrischer Raum und $A \subset E$.

– Betrachte zuerst

$$\begin{aligned} \partial A &= \overline{A} \setminus \mathrm{int}(A) \\ &= \overline{A} \cap \complement\, \mathrm{int}(A) \\ &= \overline{A} \cap \complement\, \mathrm{int}(\complement\complement A) \\ &= \overline{A} \cap \overline{\complement A}\,. \qquad \text{(Prop 3.12)} \end{aligned}$$

Da A beliebig war, gilt auch (nehme $A \to \complement A$)

$$\begin{aligned} \partial \complement A &= \overline{\complement A} \cap \overline{\complement\complement A} \\ &= \overline{\complement A} \cap \overline{A} \\ &= \partial A\,. \end{aligned}$$

– Betrachte nun

$$\overline{A} = \big(\overline{A} \setminus \mathrm{int}(A)\big) \,\dot\cup\, \mathrm{int}(A) = \partial\, A \dot\cup\, \mathrm{int}(A)\,.$$

– Betrachte schließlich

$$\begin{aligned} E &= \overline{A} \,\dot\cup\, \complement\overline{A} \\ &= (\,\mathrm{int}(A) \,\dot\cup\, \partial A) \,\dot\cup\, \complement\overline{A} \\ &= (\,\mathrm{int}(A) \,\dot\cup\, \partial A) \,\dot\cup\, (\mathrm{int}(\complement A)) \qquad \text{(Prop 3.12)} \\ &= \mathrm{int}(A) \,\dot\cup\, \partial A \,\dot\cup\, \mathrm{int}(\complement A)\,. \end{aligned}$$

(iv) Sei $\mathcal{O}_E := \{O \cap E : O \in \mathcal{O}_\mathbb{R}\}$ die induzierte Topologie für E. Dann gilt $(1,2] = E \cap (1,100) \in \mathcal{O}_E$ und $\complement(0,1] = E \setminus (0,1] = (1,2]$. Die Behauptungen folgen.

$\square$