Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, M. Langford
Wintersemester 2014/15

Zusatzübungsblatt zur Vorlesung Analysis I

Blatt 13

Abgabe: Bis Dienstag 14. April 2015, 9:55 Uhr, in den Briefumschlag vor F 402. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt.

Hinweis: Alle Punkte dieses Blattes sind Zusatzpunkte für die Analysis II[1] Vorlesung im Sommersemester 2015.

Aufgabe 13.1 (*Kompakte Mengen*) (*4 Punkte*)
Seien K_1, K_2 disjunkte kompakte Mengen in einem metrischen Raum E, so können K_1 und K_2 durch offene Mengen getrennt werden, d. h. es gibt disjunkte offene Mengen $\Omega_i \subset E$, $i = 1, 2$, so dass

$$K_i \subset \Omega_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2$$

gilt.

Aufgabe 13.2 (*Variation des Banachschen Fixpunktsatzes*) (*4 Punkte*)
Sei E ein kompakter metrischer Raum. Sei $T : E \to E$ eine Abbildung und gelte

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y)$$

für alle $x \neq y \in E$. Dann besitzt T einen eindeutig bestimmten Fixpunkt.

Aufgabe 13.3 (*Endlich-dimensionale normierte Räume*) (*4 Punkte*)
Zeigen Sie, dass alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.

Anleitung: Sei $||\cdot||$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $|\cdot|$ die euklidische Norm. Zeigen Sie, dass $||\cdot||$ auf dem Raum $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ stetig ist und betrachten Sie das Supremum und das Infimum von $||\cdot||$ auf der Einheitskugel $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. Folgern Sie, dass $||\cdot||$ und $|\cdot|$ äquivalent sind.

Aufgabe 13.4 (*Hausdorff-Metrik*) (*2+2+4+2+2+4 Punkte*)
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Sei $\mathcal{K}$ die Menge aller nichtleeren, kompakten Teilmengen von K und definiere für $X \subset \mathcal{K}$ und $\varepsilon > 0$

$$X_\varepsilon := \bigcup_{x \in X} (B_\varepsilon(x) \cap K)\ .$$

Definiere $d_{\mathcal{H}} : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbb{R}_+$ durch

$$d_{\mathcal{H}}(X, Y) := \inf\{\varepsilon > 0 : X \subset Y_\varepsilon \text{ und } Y \subset X_\varepsilon\}\,.$$

(i) Zeigen Sie, dass $d_{\mathcal{H}}$ eine Metrik auf $\mathcal{K}$ definiert.

Bitte wenden!

[1]Weitere Informationen zur Vorlesung Analysis II finden Sie unter folgendem Link: `http://www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/analysis2-15.html`

(ii) Zeigen Sie, dass $d_{\mathcal{H}}$ äquivalent zur Metrik

$$\delta(X,Y) := \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} |x-y| + \sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} |y-x|$$

ist. Warum betrachtet man nicht $\Delta(X,Y) := \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} |x-y|$?

(iii) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{K},\, d_{\mathcal{H}})$ vollständig ist. **(!)**

Betrachten Sie die unter `http://de.wikipedia.org/wiki/Koch-Kurve` angegebenen Iterationen.

(iv) Bestimmen Sie die Länge der Kurve nach der n-ten Iteration, wenn die Länge anfangs gleich eins ist.

(v) Zeigen Sie, dass diese Iterationen bezüglich $d_{\mathcal{H}}$ konvergieren.

(vi) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{K}, d_{\mathcal{H}})$ kompakt ist. **(!)**