Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Lothar Sebastian Krapp
SoSe 2016

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II (B2)

Blatt 10

Aufgabe 1
(5 Punkte)
Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und W ein Unterraum von V.

(a) Zeigen Sie, dass W ein lineares Komplement in V hat, d.h. es gibt einen Unterraum $W' \subseteq V$ mit $W' \oplus W = V$.

(b) Seien $v_1, ..., v_s \in V$ linear unabhängig mit $\operatorname{span}\{v_1, ..., v_s\} \cap W = \{0\}$. Zeigen Sie, dass $\{v_1, ..., v_s\}$ zu einer Basis eines linearen Komplementes von W in V ergänzt werden kann.

(c) Sei $\dim V \geq 2$. Sei $W \subsetneq V$, $W \neq 0$ ein Unterraum von V. Zeigen Sie, dass W zumindest zwei verschiedene Komplemente besitzt.

Aufgabe 2
(5 Punkte)
Seien V ein K-Vektorraum und $W_1, ..., W_k$ Unterräume von V. Sei $W := W_1 + ... + W_k$.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $W_1, ..., W_k$ sind unabhängig, d.h. falls $\alpha_1 + ... + \alpha_k = 0$ mit $\alpha_i \in W_i$ für $0 < i \leq k$, so ist $\alpha_i = 0$ für $0 < i \leq k$.

(ii) Für jedes j mit $2 \leq j \leq k$ gilt

$$W_j \cap (W_1 + ... + W_{j-1}) = \{0\}.$$

(iii) Ist $\mathcal{B}_i$ eine angeordnete Basis für W_i $(0 < i \leq k)$, so ist $(\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_k)$ eine angeordnete Basis für W.

Falls eine (und damit alle) der oben stehenden Bedingungen erfüllt ist, schreiben wir $W = W_1 \oplus ... \oplus W_k$.

(b) Sei jetzt V endlichdimensional. Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Angenommen $V = W_1 \oplus ... \oplus W_k$ und für alle $0 < i \leq k$ ist W_i T-invariant. Sei für jedes $0 < i \leq k$ $\mathcal{B}_i$ eine angeordnete Basis für W_i und $\mathcal{B} := (\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_k)$. Zeigen Sie, dass

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [T|_{W_1}]_{\mathcal{B}_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [T|_{W_k}]_{\mathcal{B}_k} \end{pmatrix}$$

ist.

Aufgabe 3
(5 Punkte)
Seien $T : V \to V$ linear, $c \in K$ ein Eigenwert von T, $v_1, ..., v_r \in V$ mit $v_1 \neq 0$ so, dass

$$(T - cI)(v_1) = 0$$

und

$$(T - cI)(v_i) = v_{i-1}$$

für $i = 2, ..., r$, d.h. so, dass $(v_1, ..., v_r)$ eine Jordan Kette der Länge r zum Eigenwert c ist.
Zeigen Sie für $W := \mathrm{Span}\{v_1, ..., v_r\}$:

(i) $\mathcal{B}' := \{v_1, ..., v_r\}$ ist eine Basis für W.

(ii) W ist T-invariant.

(iii)

$$[T_W]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} c & 1 & & 0 \\ & c & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & c \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4
(5 Punkte)

(a) Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $T : V \to V$ linear, A die Matrix von T in Jordanscher Normalform. Zeigen Sie:

  (i) Die Eigenwerte von T sind die Diagonaleinträge von A.

  (ii) Kommt $c \in K$ gerade j mal auf der Diagonalen von A vor, so ist die algebraische Vielfachheit von c im charakteristischen Polynom von T gleich j.

  (iii) Ist r die größte Dimension einer Jordanzelle in A zum Eigenwert c, so ist r die algebraische Vielfachheit von c im Minimalpolynom von T.

  (iv) Ist d die Anzahl der Jordan-Zellen in A zum Eigenwert c, so ist d die geometrische Vielfachheit von c in T.

(b) Es sei $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ eine Matrix mit charakteristischem Polynom $(X - 2)^3(X + 7)^2$ und Minimalpolynom $(X - 2)^2(X + 7)$. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A.

Zusatzaufgabe für Interessierte
(2 extra Punkte)
Es sei $\mathfrak{M}$ eine Menge von paarweise unähnlichen komplexen 6×6-Matrizen mit charakteristischem Polynom $(X + 2)^4(X - 1)^2$. Wie viele Elemente kann $\mathfrak{M}$ höchstens haben?

Abgabe: Donnerstag, 23. Juni 2016, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.