Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Lothar Sebastian Krapp
SoSe 2016

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II (B2)

Blatt 4

Aufgabe 1
(3 Punkte)
Seien $n \in \mathbb{N}$, $\sigma, \tau \in S_n$ und $f, g : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$.
Erinnerung: Die Funktion $\sigma f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ ist durch

$$(\sigma f)(x_1, ..., x_n) := f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)})$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass $(\sigma\tau)f = \sigma(\tau f)$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\sigma(f + g) = (\sigma f) + (\sigma g)$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $\sigma(fg) = (\sigma f)(\sigma g)$ gilt.

Aufgabe 2
(5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Gruppe S_n genau dann kommutativ ist, wenn $n \leq 2$.

b) Sei A_n die Menge aller $\sigma \in S_n$ mit $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$. Zeigen Sie, dass die Menge aller 3-Zyklen die Gruppe A_n erzeugt, falls $n \geq 3$. (Eine Teilmenge M einer Gruppe G erzeugt G, falls jedes Element von G das Produkt von Elementen von M und Inversen von Elementen von M ist.)

c) In der Vorlesung wurde bewiesen, dass jedes $\sigma \in S_n$ sich als Produkt von Zyklen mit paarweise disjunkten Trägern darstellen lässt.

Zeigen Sie, dass diese Darstellung bis auf Reihenfolge der Faktoren eindeutig ist.

Aufgabe 3
(6 Punkte)
Sei K ein Körper. Seien V ein K-Vektorraum mit Basis $\{x_1, ..., x_n\}$ und U ein K-Vektorraum mit Basis $\{y_1, ..., y_m\}$.

(a) Seien $\alpha_{ij} \in K$ für $0 < i \leq n$ und $0 < j \leq m$. Zeigen Sie, dass es eine Bilinearform $w : V \times U \to K$ mit $w(x_i, y_j) = \alpha_{ij}$ für $0 < i \leq n$ und $0 < j \leq m$ gibt. Zeigen Sie, dass w durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt ist.

(b) Für $0 < p \leq n$ und $0 < q \leq m$ sei $w_{pq} : U \times V \to K \in \mathcal{L}^{(2)}(U \times V, K)$ die eindeutige Bilinearform mit $w_{pq}(x_i, y_j) = \delta_{ip}\delta_{jq}$. Zeigen Sie, dass

$$W := \{w_{pq} \mid 0 < p \leq n \text{ und } 0 < q \leq m\}$$

linear unabhängig über K ist.

(c) Zeigen Sie, dass W (von Teil (b)) ein Erzeugendensystem von $\mathcal{L}^{(2)}(U \times V, K)$ als K-Vektorraum ist. Geben Sie die Dimension von $\mathcal{L}^{(2)}(U \times V, K)$ an.

Aufgabe 4
(6 Punkte)
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Ein n-lineares Funktional $\Delta : V^n \to K$ heißt alternierend falls wenn $i, j \in \{1, ..., n\}$ mit $z_i = z_j$ und $i \neq j$ existieren, $\Delta(z_1, ..., z_n) = 0$ ist.

(a) Sei $\Delta : V^n \to K$ ein n-lineares alternierendes Funktional. Zeigen Sie, dass für alle $z_1, \ldots, z_n \in V$ und alle $\sigma \in S_n$, $\Delta(z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(n)}) = sign(\sigma)\Delta(z_1, \ldots, z_n)$.

(b) Wir sagen, dass Δ trivial ist, wenn $\Delta(x_1, ..., x_n) = 0$ für alle $x_1, ..., x_n \in V$. Sei $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ eine Basis von V. Zeigen Sie, dass Δ genau dann trivial ist, wenn $\Delta(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 0$.

(c) Sei U ein r-dimensionaler Unterraum von V, seien $x_{r+1}, ..., x_n$ feste Vektoren in V und sei $\Delta : V^n \to K$ ein n-lineares alternierendes Funktional. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\Delta_U : U^r \to K$$

definiert durch

$$\Delta_U(u_1, ..., u_r) := \Delta(u_1, ..., u_r, x_{r+1}, ..., x_n)$$

ein alternierendes r-lineares Funktional ist. Wann ist Δ_U nicht trivial? Begründen Sie Ihre Antwort.

Zusatzaufgabe für Interessierte
(2 extra-Punkte)
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum.
In der Vorlesung wurde der Begriff "alternierend" nur für Elemente von $L^{(n)}(V^n, K)$ definiert. Wir können aber diesen Begriff für Elemente von $L^{(m)}(V^m, K)$ für beliebiges m einführen: $\Delta \in L^{(m)}(V^m, K)$ heißt alternierend, falls Folgendes gilt: Wenn $i, j \in \mathbb{N}$ mit $z_i = z_j$ und $i \neq j$ existieren, dann ist $\Delta(z_1, \ldots, z_m) = 0$.

Sie können ohne Beweis die folgende Tatsache benutzen: Für jedes alternierende $\Delta \in L^{(m)}(V^m, K)$, für alle $z_1, \ldots, z_m \in V$ und alle $\sigma \in S_m$ gilt $\Delta(z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(m)}) = sign(\sigma)\Delta(z_1, \ldots, z_m)$. Der Beweis dieser Behauptung läuft genauso wie bei Aufgabe 4 (a).

a) Sei $m \in \mathbb{N}$ und sei W die Menge aller alternierenden m-linearen Formen auf V^m.

Zeigen Sie, dass W ein Untervektorraum von $L^{(m)}(V^m, K)$ ist und berechnen Sie seine Dimension als funktion von m und n.

Abgabe: Donnerstag, 12. Mai 2016, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.