Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Lothar Sebastian Krapp
SoSe 2016

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II (B2)

Blatt 8

Definitionen: Sei $A \in K^{n \times n}$
A heißt *nilpotent*, falls $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $A^k = 0$.
Die *Spur* von A, bezeichnet $Tr(A)$, ist die Summe aller Diagonalkoeffizienten von A, also $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Aufgabe 1
(5 Punkte)

(a) Sei $A \in K^{n \times n}$ und $\chi_A(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ das charakteristische Polynom von A.

Zeigen Sie, dass $a_n = 1$, $a_{n-1} = -Tr(A)$ und $a_0 = (-1)^n \det(A)$.

(b) Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $T : V \to V$ ein Isomorphismus. Zeigen Sie, dass es ein $P \in K[X]$ gibt mit $T^{-1} = P(T)$.

Aufgabe 2
(5 Punkte)
Ziel dieser Aufgabe ist es, den Satz von Cayley-hamilton für obere Dreiecksmatrizen direkt zu beweisen. Der Satz von Cayley-Hamilton darf nicht verwendet werden.
Für $k \in \{0, \ldots, n\}$ sei

$$V_k := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i = 0 \text{ für } i > k \right\}$$

und sei $A_k \in K^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix, deren (k, k)-ter Eintrag null ist.

(a) Seien $k \in \{0, \ldots n\}$ und $v \in V_k$. Zeigen Sie, dass $A_k v \in V_{k-1}$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n = 0.$$

(c) Sei A eine obere Dreiecksmatrix und χ_A ihr charakteristisches Polynom. Zeigen Sie, dass $\chi_A(A) = 0$.

Aufgabe 3
(5 Punkte)

(a) Sei $A \in K^{n \times n}$ nilpotent. Zeigen Sie, dass A nicht injektiv ist und dass $A^n = 0$.

(b) Sei $A = (a_{ij})_{ij} \in K^{n \times n}$, so dass $a_{ij} = 0$ wenn $i \geq j$. Zeigen Sie, dass A nilpotent ist.

Aufgabe 4
(5 Punkte)

(a) Seien

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

alle in $\mathbb{R}^{3\times 3}$

Berechnen Sie das Minimalpolynom von A, B und C

(b) Berechnen Sie A^k und C^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte
(2 extra Punkte)
Erinnerung: $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen, d.h. alle nichtkonstante Polynomen in $\mathbb{C}[X]$ zerfallen in Linearfaktoren über $\mathbb{C}$.
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so dass $Tr(A^k) = 0$ für alle $k \geq 1$. Zeigen Sie, dass A nilpotent ist.
Hinweis: Falls A und B ähnlich sind, gilt $Tr(A) = Tr(B)$.

Abgabe: Donnerstag, 9. Juni 2016, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.