Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
20. April 2017

Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Simon Müller
Wintersemester 2016/2017

Nachklausur zur Algebra (B3)

Klausurnummer: 1

Matrikelnummer: Pseudonym:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
erreichte Punktzahl								
Korrektor (Initialen)								
Maximalpunktzahl	10	10	10	10	10	10	10	

Wichtige Hinweise:

1. Überprüfen Sie Ihren Klausurbogen auf **Vollständigkeit**, d.h. auf das Vorhandensein aller **7 Aufgaben**.
2. Von den 7 Aufgaben werden nur die **besten 6 gewertet**.
3. Bei jeder Aufgabe ist der **vollständige Lösungsweg** zu dokumentieren. Nicht ausreichend begründete Lösungen können zu Punktabzug führen!
4. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben selbstständig und **ohne die Verwendung von Hilfsmitteln** außer Schreibzeug und Papier.
5. Verwenden Sie für Ihren Aufschrieb ausschließlich einen **dokumentenechten Stift**, also insbesondere **keinen Bleistift**! Aufschriebe mit Bleistift werden nicht gewertet. Graphen und Skizzen dürfen mit Bleistift erstellt werden.
6. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Matrikelnummer.
7. Schreiben Sie Ihre Antworten leserlich auf das Blatt unter die Aufgabenstellung oder, falls der Platz nicht ausreicht, unter Angabe der bearbeiteten Aufgabe, auf das weiße Arbeitspapier. Benutzen Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt. (Das gelbe Konzeptpapier dient lediglich für eigene Notizen. In der Wertung wird ausschließlich das berücksichtigt, was auf dem Klausurbogen oder dem weißen Arbeitspapier steht.)
8. In Aufgaben, in denen Definitionen verlangt werden, müssen Sie besonders die unter der Frage kursiv geschriebenen Anweisungen beachten. Sie dürfen immer sämtliche Begriffe aus den Vorlesungen Lineare Algebra I des Wintersemesters 2015/2016 und Lineare Algebra II des Sommersemesters 2016 als bekannt voraussetzen. Begriffe aus der Vorlesung Algebra (B3) müssen in der Regel definiert werden, es sei denn, die Anweisung besagt etwas anderes.
9. Die Bearbeitungszeit beträgt **180 Minuten**.

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 1**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 1 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte) Definieren Sie **Primideal** und geben Sie die **Charakterisierung von Primidealen durch Faktorringe** an.

Dabei dürfen Sie die Begriffe „Ideal“ und „Faktorring“ sowie alle Begriffe aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und II als bekannt voraussetzen. Alle anderen von Ihnen vewendeten Begriffe müssen definiert werden.

(b) Zeigen Sie:

  (a) (2 Punkte) Das von X und Y erzeugte Ideal in $\mathbb{Z}[X, Y]$ ist kein maximales Ideal von $\mathbb{Z}[X, Y]$

  (b) (2 Punkte) Das von X und Y erzeugte Ideal in $\mathbb{Q}[X, Y]$ ist ein maximales Ideal von $\mathbb{Q}[X, Y]$.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

(c) (4 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring mit 1, der endlich ist. Zeigen Sie, dass ein Ideal von R genau dann prim ist, wenn es maximal ist.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 1:

Seite 2 zu Aufgabe 1

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 1**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 1:

Seite 4 zu Aufgabe 1

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 2 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte) Definieren Sie den Begriff **Hauptidealring**. Welchen Zusammenhang gibt es zwischen euklidischen Ringen, Hauptidealringen und faktoriellen Ringen?

Dabei dürfen Sie die Begriffe „Ideal", „euklidischer Ring" und „faktorieller Ring" sowie alle Begriffe aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und II als bekannt voraussetzen. Alle anderen von Ihnen vewendeten Begriffe müssen definiert werden.

Sei $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-2}] = \{n + im\sqrt{2} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ und $N(z) = z\bar{z}$ für alle $z \in R$. Wir erinnern daran, dass (R, N) euklidisch ist.

(b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass $1 - i\sqrt{2}$ irreduzibel in R ist.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

(c) (4 Punkte) Sei $I \neq \{0\}$ ein Ideal von R. Zeigen Sie, dass der Ring R/I endlich ist.

Hinweis: Sie können zunächst bemerken, dass $\{b \in R \mid N(b) < N(a)\}$ endlich ist für alle $a \in R$.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 2:

Seite 2 zu Aufgabe 2

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 2:

Seite 4 zu Aufgabe 2

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 3 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte) Geben Sie das **Lemma von Gauss** und das **Eisensteinsche Kriterium** an.

Sie dürfen alle Definitionen der Vorlesung Algebra (B3) sowie alle Begriffe aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und II als bekannt voraussetzen.

(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie in jedem der folgenden Fälle, ob das angegebene Polynom im angegebenen Ring irreduzibel ist:

(i) $f_1 = X^3 + 8X + 13$ in $\mathbb{Q}[X]$

(ii) $f_2 = 3X^4 + 6X^2 + 9X + 6$ in $\mathbb{Z}[X]$

(iii) $f_3 = X^7 + 21X^5 + 28X^2 + 14X + 21$ in $\mathbb{Q}[X]$

(iv) $f_4 = \frac{1}{6}X^5 + \frac{1}{2}X^4 + 3X + 2$ in $\mathbb{Q}[X]$

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

(c) (4 Punkte) Sei $f := X^5 + 6X^3 + 9X + 1 - i\sqrt{2}$. Zeigen Sie, dass f irreduzibel in $\mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$ ist, wobei $\mathbb{Q}[\sqrt{-2}] = \{r + i\sqrt{2}s \mid r, s \in \mathbb{Q}\}$ ist.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 2.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 3:

Seite 2 zu Aufgabe 3

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 3:

Seite 4 zu Aufgabe 3

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 4**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 4 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte) Definieren Sie den Begriff **normale Körpererweiterung**.

Sie dürfen den Begriff „algebraische Körpererweiterung“ sowie alle Begriffe aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und II als bekannt voraussetzen. Alle anderen von Ihnen vewendeten Begriffe müssen definiert werden.

(b) (4 Punkte) Sei K die normale Hülle von $\mathbb{Q}(\sqrt{\sqrt{3}+1})/\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie $[K : \mathbb{Q}]$.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

(c) (4 Punkte) Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung, $\alpha, \beta \in L$, f das Minimalpolynom von α über K und g das Minimalpolynom von β über K. Zeigen Sie, dass f genau dann irreduzibel über $K(\beta)$ ist, wenn g irreduzibel über $K(\alpha)$ ist.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 4:

Seite 2 zu Aufgabe 4

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 4**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 4:

Seite 4 zu Aufgabe 4

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 5**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 5 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte) Geben Sie die **Bahngleichung** an.

Sie dürfen die Begriffe „Gruppenaktion“ und „Index einer Untergruppe“ sowie alle Begriffe aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und II als bekannt voraussetzen. Alle anderen von Ihnen vewendeten Begriffe müssen definiert werden.

(b) (4 Punkte) Sei G eine Gruppe der Ordnung 77, die auf einer Menge X der Ordnung 48 operiert. Zeigen Sie, dass diese Aktion einen Fixpunkt hat, d.h, dass es ein $x \in X$ existiert, so dass $g.x = x$ für alle $g \in G$.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

(c) (4 Punkte) Sei G eine endliche Gruppe und $H \lhd G$. Sei p die kleinste Primzahl, die $|G|$ teilt. Zeigen Sie: falls $|H| = p$, ist H im Zentrum von G enthalten.

Hinweis: Betrachten Sie eine Aktion von G auf H

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 5:

Seite 2 zu Aufgabe 5

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 5**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 5:

Seite 4 zu Aufgabe 5

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 6**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 6 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte) Geben Sie den **Satz von Lagrange** und den **ersten Sylow-Satz** an.

Sie dürfen alle Definitionen der Vorlesung Algebra B3 sowie alle Begriffe aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und II als bekannt voraussetzen.

(b) Sei G eine Gruppe der Ordnung 440. Zeigen Sie:

(i) (2 Punkte) G besitzt eine normale Untergruppe H der Ordnung 11.

(ii) (3 Punkte) G besitzt genau eine Untergruppe der Ordnung 55.

Hinweis: Wenden Sie den Satz des Verband-Isomorphismus (Lattice Isomorphism theorem) auf G/H an.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

(c) (3 Punkte) Seien $p < q$ Primzahlen mit $p \nmid q-1$. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung pq zyklisch ist.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 6:

Seite 2 zu Aufgabe 6

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 6**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 6:

Seite 4 zu Aufgabe 6

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 7**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 7 (10 Punkte).

(a) (3 Punkte) Geben Sie den **Hauptsatz der Galoistheorie** an.

Sie dürfen alle Definitionen der Vorlesung Algebra (B3) sowie alle Begriffe aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und II als bekannt voraussetzen.

(b) (4 Punkte) Sei K der Zerfällungskörper von $X^4 - 16X^2 + 4 \in \mathbb{Q}[X]$. Berechnen Sie $Gal(K/\mathbb{Q})$.

Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass $X^4 - 16X + 4$ *irreduzibel über* $\mathbb{Q}$ *ist*

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

(c) (3 Punkte) Sei K ein Körper, f ein irreduzibles separables Polynom in $K[X]$ und L der Zerfällungskörper von f. Wir nehmen an, dass $Gal(L/K)$ abelsch ist. Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $K(\alpha)/K$ galoissch ist für alle $\alpha \in L$.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 7:

Seite 2 zu Aufgabe 7

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 7**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 7:

Seite 4 zu Aufgabe 7