Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
31. Januar 2017

Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Simon Müller
Wintersemester 2016-2017

Probeklausur zur Algebra (B3)

Klausurnummer: 1

Matrikelnummer: Pseudonym:

Aufgabe	1	2	3	$\sum$
erreichte Punktzahl				
Korrektor (Initialen)				
Maximalpunktzahl	10	10	10	

Wichtige Hinweise:

1. Überprüfen Sie Ihren Klausurbogen auf **Vollständigkeit**, d.h. das Vorhandensein aller **3 Aufgaben**.
2. Bei jeder Aufgabe ist der **vollständige Lösungsweg** zu dokumentieren. Nicht ausreichend begründete Lösungen können zu Punktabzug führen!
3. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben selbstständig und **ohne die Verwendung von Hilfsmitteln** außer Schreibzeug und Papier.
4. Verwenden Sie für Ihren Aufschrieb ausschließlich einen **dokumentenechten Stift**, also insbesondere **keinen Bleistift**! Aufschriebe mit Bleistift werden nicht gewertet. Graphen und Skizzen dürfen mit Bleistift erstellt werden.
5. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Matrikelnummer.
6. Schreiben Sie Ihre Antworten leserlich auf das Blatt unter die Aufgabenstellung oder, falls der Platz nicht ausreicht, unter Angabe der bearbeiteten Aufgabe, auf das weiße Arbeitspapier. Benutzen Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt. (Das gelbe Konzeptpapier dient lediglich für eigene Notizen. In der Wertung wird ausschließlich das berücksichtigt, was auf dem Klausurbogen oder dem weißen Arbeitspapier steht.)
7. Wenn Sie eine Frage haben, melden Sie sich leise, indem Sie Ihre Hand heben. Wenn Sie zusätzliches Papier brauchen, melden Sie sich mit Papier der gewünschten Art (Arbeits- bzw. Konzeptpapier) in der Hand.
8. Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 1**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 1 (10 Punkte).

(a) (3 Punkte). Geben Sie die Definition von *faktoriellem Ring* und das *Lemma von Gauß* an.

Dabei dürfen Sie die Begriffe „irreduzibel", „reduzibel", „assoziiert" und „Quotientenkörper" sowie alle Begriffe aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und II als bekannt voraussetzen. Alle anderen von Ihnen vewendeten Begriffe müssen definiert werden.

(b) (3 Punkte)Bestimmen Sie, ob folgende Polynomen über $\mathbb{Q}$ irreduzibel sind. Begründen Sie dabei Ihre Antwort:

(i) $f_1 = X^4 - 1$

(ii) $f_2 = X^7 + 11X^3 - 33X + 22$

(iii) $f_3 = \frac{1}{9}X^5 + \frac{5}{3}X^4 + X^3 + \frac{1}{3}$

(iv) $f_4 = X^2 + 15X + 7$.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

(c) (4 Punkte)Sei K ein Körper. Für alle $f \in K[X]$ definieren wir $\overline{f} \in K(X)$ durch $\overline{f}(X) := X^n f(\frac{1}{X}) \in K(X)$, wobei $n = \deg(f)$.

Sei $f \in K[X]$ mit $f(0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\overline{f} \in K[X]$ und dass f genau dann irreduzibel ist, wenn $\overline{f}$ irreduzibel ist.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 1:

Seite 2 zu Aufgabe 1

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 1**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 1:

Seite 4 zu Aufgabe 1

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 2 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte). Sei L/K ein endliche Körpererweiterung und $\alpha \in L$. Definieren Sie das *Minimalpolynom* $m_{\alpha,K}$ von α über K und den *Grad der Erweiterung* $[L : K]$. Welche Beziehung gibt es zwischen $m_{\alpha,K}$ und $[K(\alpha) : K]$?

Dabei dürfen Sie alle Begriffe aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und II als bekannt voraussetzen. Alle anderen von Ihnen vewendeten Begriffe müssen definiert werden.

(b) (5 Punkte).Bestimmen Sie den Grad folgender Erweiterungen:

(i) $\mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt[3]{2}})/\mathbb{Q}$
(ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[5]{3})/\mathbb{Q}$
(iii) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[6]{3})/\mathbb{Q}$

Begründen Sie dabei Ihre Antwort.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

(c) (3 Punkte)Sei L/K eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$ algebraisch über K. Zeigen Sie: für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $[K(\alpha^n) : K] \geq \frac{1}{n}[K(\alpha) : K]$.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 2:

Seite 2 zu Aufgabe 2

Matrikelnummer:

Seite 3 zu Aufgabe 2

erreichte Punktzahl:

Korrektor (Initialen):

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 2:

Seite 4 zu Aufgabe 2

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 3 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte). Sei G eine Gruppe. Was bedeutet es, dass G *auflösbar* ist?

Dabei dürfen Sie alle Begriffe aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und II als bekannt voraussetzen. Alle anderen von Ihnen vewendeten Begriffe müssen definiert werden.

(b) (5 Punkte)Sei G eine einfache Gruppe der Ordnung 168. Wie viele Elemente der Ordnung 7 gibt es in G?

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

(c) (3 Punkte)Seien p, q zwei verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie, dass alle Gruppen der Ordnung pq auflösbar sind.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 3:

Seite 2 zu Aufgabe 3

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 3:

Seite 4 zu Aufgabe 3