Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
31. Januar 2017

Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Simon Müller
Wintersemester 2016-2017

Probeklausur zur Algebra (B3)

Klausurnummer: 1

Matrikelnummer:

Pseudonym:

Aufgabe	1	2	3	$\sum$
erreichte Punktzahl				
Korrektor (Initialen)				
Maximalpunktzahl	10	10	10	

Wichtige Hinweise:

1. Überprüfen Sie Ihren Klausurbogen auf **Vollständigkeit**, d.h. das Vorhandensein aller **3 Aufgaben**.
2. Bei jeder Aufgabe ist der **vollständige Lösungsweg** zu dokumentieren. Nicht ausreichend begründete Lösungen können zu Punktabzug führen!
3. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben selbstständig und **ohne die Verwendung von Hilfsmitteln** außer Schreibzeug und Papier.
4. Verwenden Sie für Ihren Aufschrieb ausschließlich einen **dokumentenechten Stift**, also insbesondere **keinen Bleistift**! Aufschriebe mit Bleistift werden nicht gewertet. Graphen und Skizzen dürfen mit Bleistift erstellt werden.
5. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Matrikelnummer.
6. Schreiben Sie Ihre Antworten leserlich auf das Blatt unter die Aufgabenstellung oder, falls der Platz nicht ausreicht, unter Angabe der bearbeiteten Aufgabe, auf das weiße Arbeitspapier. Benutzen Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt. (Das gelbe Konzeptpapier dient lediglich für eigene Notizen. In der Wertung wird ausschließlich das berücksichtigt, was auf dem Klausurbogen oder dem weißen Arbeitspapier steht.)
7. Wenn Sie eine Frage haben, melden Sie sich leise, indem Sie Ihre Hand heben. Wenn Sie zusätzliches Papier brauchen, melden Sie sich mit Papier der gewünschten Art (Arbeits- bzw. Konzeptpapier) in der Hand.
8. Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 1**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 1 (10 Punkte).

(a) (3 Punkte). Geben Sie die Definition von *faktoriellem Ring* und das *Lemma von Gauß* an.

Dabei dürfen Sie die Begriffe „irreduzibel", „reduzibel", „assoziiert" und „Quotientenkörper" sowie alle Begriffe aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und II als bekannt voraussetzen. Alle anderen von Ihnen vewendeten Begriffe müssen definiert werden.

(b) (3 Punkte)Bestimmen Sie, ob folgende Polynomen über $\mathbb{Q}$ irreduzibel sind. Begründen Sie dabei Ihre Antwort:

(i) $f_1 = X^4 - 1$

(ii) $f_2 = X^7 + 11X^3 - 33X + 22$

(iii) $f_3 = \frac{1}{9}X^5 + \frac{5}{3}X^4 + X^3 + \frac{1}{3}$

(iv) $f_4 = X^2 + 15X + 7$.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

(c) (4 Punkte)Sei K ein Körper. Für alle $f \in K[X]$ definieren wir $\overline{f} \in K(X)$ durch $\overline{f}(X) := X^n f(\frac{1}{X}) \in K(X)$, wobei $n = \deg(f)$.

Sei $f \in K[X]$ mit $f(0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\overline{f} \in K[X]$ und dass f genau dann irreduzibel ist, wenn $\overline{f}$ irreduzibel ist.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 1:

Seite 2 zu Aufgabe 1

(a) Siehe Vorlesung

(b) (i) $X - 1 \mid f_1$, also ist f_1 reduzibel.

Nach dem Lemma von Gauß wissen wir: wenn ein Polynom in $\mathbb{Z}[X]$ irreduzibel ist, ist es auch irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

(ii) Eisenstein mit $p = 11$ zeigt, dass f_2 irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$ ist.

(iii) f_3 ist genau dann irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$, wenn $9f_3$ ist. Eisenstein mit $p = 3$ zeigt, dass $9f_3$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$ ist.

(iv) Weil 2 prim in $\mathbb{Z}$ ist, können wir das Reduktionskriterium modulo 2 anwenden. $f_4 \equiv X^2 + X + 1 \mod 2$. Es gilt $f_4(0) = f_4(1) = 1$ in $\mathbb{F}_2$. f_4 it vom Grad 2 und hat keine Nullstelle in $\mathbb{F}_2$, also ist f_4 irreduzibel in $\mathbb{F}_2[X]$, also ist f_4 irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$.

(c) Behauptung: $\deg(\overline{f}) = \deg(f)$: Schreibe $f = a_0 + a_1 X \cdots + a_n X^n$ mit $a_n \neq 0$. Es gilt dann $\overline{f} = a_n + a_{n-1}X + \cdots + a_0 X^n$. Nach Voraussetzung ist $a_0 \neq 0$ und daraus folgt die Behauptung.

Behauptung: Für alle $g, h \in K[X]$ gilt $\overline{gh} = \overline{g}.\overline{h}$: Sei $k := \deg(g), l := \deg(h)$. Es gilt $m := \deg(gh) = k + l$ und $\overline{gh}(X) = X^m (gh)(\frac{1}{X}) = X^k g(\frac{1}{X}) X^l h(\frac{1}{X}) = \overline{g}(X)\overline{h}(X)$.

Sei f reduzibel; dann gibt es $g, h \in K[X]$ mit $f = gh$ und $\deg(g), \deg(h) < \deg(f)$. Es gilt also $\overline{f} = \overline{g}\overline{h}$. Zudem gilt $g(0) \neq 0 \neq h(0)$, also nach der ersten Behauptung $\deg(\overline{g}) = \deg(g)$ und $\deg(\overline{h}) = \deg(h)$, also $\deg(\overline{g}), \deg(\overline{h}) < \deg(f) = \deg(\overline{f})$ und $\overline{f} = \overline{g}\overline{h}$, also ist $\overline{f}$ reduzibel. Die andere Richtung folgt dann unmittelbar aus der Tatsache, dass $\overline{\overline{f}} = f$.

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 1**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 1:

Seite 4 zu Aufgabe 1

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 2 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte). Sei L/K ein endliche Körpererweiterung und $\alpha \in L$. Definieren Sie das *Minimalpolynom* $m_{\alpha,K}$ von α über K und den *Grad der Erweiterung* $[L : K]$. Welche Beziehung gibt es zwischen $m_{\alpha,K}$ und $[K(\alpha) : K]$?

Dabei dürfen Sie alle Begriffe aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und II als bekannt voraussetzen. Alle anderen von Ihnen vewendeten Begriffe müssen definiert werden.

(b) (5 Punkte).Bestimmen Sie den Grad folgender Erweiterungen:

(i) $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt[3]{2}})/\mathbb{Q}$

(ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[5]{3})/\mathbb{Q}$

(iii) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[6]{3})/\mathbb{Q}$

Begründen Sie dabei Ihre Antwort.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

(c) (3 Punkte)Sei L/K eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$ algebraisch über K. Zeigen Sie: für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $[K(\alpha^n) : K] \geq \frac{1}{n}[K(\alpha) : K]$.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 2:

Seite 2 zu Aufgabe 2

(a) Siehe Vorlesung.

(b) (i) Sei $a := \sqrt{2+\sqrt[3]{2}}$, $f := (X^2-2)^3-2$. Es gilt $f(a)=0$ und $f = X^6-6X^4+12X^2-10$. Nach Eisenstein mit $p=2$+Lemma von Gauß ist f irreduzibel über $\mathbb{Q}$, also ist f das Minimalpolynom von a über $\mathbb{Q}$, also $[\mathbb{Q}(a):\mathbb{Q}] = \deg(f) = 6$.

(ii) Sei $a := \sqrt{3}$ und $b := \sqrt[5]{3}$. Nach dem Gradsatz gilt:
$[\mathbb{Q}(a,b):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(a,b):\mathbb{Q}(b)][\mathbb{Q}(b):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(a,b):\mathbb{Q}(a)][\mathbb{Q}(a):\mathbb{Q}]$.
Seien $f := X^2-3$ und $g := X^5-3$ beide in $\mathbb{Q}[X]$. Nach Eisenstein mit $p=3$+Lemma von Gauß sind f und g irreduzibel über $\mathbb{Q}$, also ist f das Minimalpolynom von a über $\mathbb{Q}$ und g das Minimalpolynom von b über $\mathbb{Q}$, also gilt $[\mathbb{Q}(a):\mathbb{Q}] = \deg(f) = 2$ und $[\mathbb{Q}(b):\mathbb{Q}] = \deg(g) = 5$.
Es gilt also $5 = [\mathbb{Q}(b):\mathbb{Q}] \mid [\mathbb{Q}(a,b):\mathbb{Q}]$ und $2 = [\mathbb{Q}(a):\mathbb{Q}] \mid [\mathbb{Q}(a,b):\mathbb{Q}]$, also $10 \mid [\mathbb{Q}(a,b):\mathbb{Q}]$.
Wegen $f(a)=0$ und $f \in \mathbb{Q}(b)[X]$ gilt außerdem $[\mathbb{Q}(a,b):\mathbb{Q}(b)] \leq \deg(f) = 2$, also
$[\mathbb{Q}(a,b):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(a,b):\mathbb{Q}(b)][\mathbb{Q}(b):\mathbb{Q}] \leq 10$. Es gilt also $[\mathbb{Q}(a,b):\mathbb{Q}] = 10$.

(iii) Es gilt $\sqrt{3} = (\sqrt[6]{3})^3$, also $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{3})$ also $[\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt[6]{3}):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}):\mathbb{Q}]$. Eisenstein mit $p=3$ und Lemma von Gauss zeigen, dass X^6-3 irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist, also $[\mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}):\mathbb{Q}] = 6$.

(c) Sei $f := m_{\alpha,K}$ und $g = m_{\alpha^n,K}$. Sei $h(X) := g(X^n) \in K[X]$. Es gilt $h(\alpha) = 0$. Nach Definition des Minimalpolynoms muss dann $\deg(f) \leq \deg(h)$ gelten. Es gilt:
$[K(\alpha):K] = \deg(f) \leq \deg(h) = n \underbrace{\deg(g)}_{=[K(\alpha^n):K]}$ und daraus folgt die Behauptung.

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 2:

Seite 4 zu Aufgabe 2

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 3 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte). Sei G eine Gruppe. Was bedeutet es, dass G *auflösbar* ist?

Dabei dürfen Sie alle Begriffe aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und II als bekannt voraussetzen. Alle anderen von Ihnen vewendeten Begriffe müssen definiert werden.

(b) (5 Punkte)Sei G eine einfache Gruppe der Ordnung 168. Wie viele Elemente der Ordnung 7 gibt es in G?

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

(c) (3 Punkte)Seien p, q zwei verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie, dass alle Gruppen der Ordnung pq auflösbar sind.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 3:

Seite 2 zu Aufgabe 3

1. Siehe Vorlesung

2. Es gilt $168 = 7.3.2^3$. Sei n_7 die Anzahl der 7-Sylow-Untregruppen. Der zweite Sylow-Satz sagt, dass $n_7 \mid 24$ und $n_7 \equiv 1 \bmod 7$. Es gibt zwei Möglichkeiten: $n_7 = 1$ und $n_7 = 8$. Gälte $n_7 = 1$, wäre die einzige 7-Sylow-Untregruppe ein Normalteiler von G, was aber ein Widerspruch ist (G ist einfach). Es muss also 8 7-Sylow-Untergruppen geben. Wir nennen sie $H_1, \dots, H_8$. Bemerke, dass $\{g \in G \mid |g| = 7\} = \bigcup_{i=1}^{8}(H_i \backslash \{1\})$. Seien $i \neq j$ in $\{1, \dots, 8\}$; wir betrachten $H := H_i \cap H_j$. H ist eine Untergruppe von H_i, also gilt nach Lagrange $|H| \mid |H_i| = 7$. Weil $i \neq j$, gilt dann $H_i \neq H_j$, also $|H| \neq 7$, also $H = \{1\}$. Die Mengen $H_1 \backslash \{1\}, \dots, H_8 \backslash \{1\}$ sind also paarweise disjunkt, also gilt $|\bigcup_{i=1}^{8}(H_i \backslash \{1\})| = \sum_{i=1}^{8} |H_i \backslash \{1\}| = 8.6 = 48$. Es gibt also 48 Elemente der Ordnung 7 in G.

3. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $q < p$. Sei n_p die Anzahl der p-Sylow-Untregruppen. Nach dem zweiten Sylow-Satz gilt $n_p \mid q$ und $n_p \equiv 1 \bmod p$. Wegen $q < p$ ist $q \equiv 1 \bmod p$ unmöglich, also muss $n_p = 1$ gelten. Sei H_p die einzige p-Sylow-Untergruppe. Wegen $n_p = 1$ muss H_p normal in G sein. Weil die Ordnung von H_p eine Primzahl ist, ist H_p zyklisch, also insebesondere abelsch; außerdem hat die Quotientengruppe G/H_p die Ordnung q, eine Primzahl, also ist G/H_p auch abelsch. Wir haben also eine Normalreihe $\{1\} \lhd H_p \lhd G$, deren Quotienten abelsch sind. G ist also auflösbar.

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 3:

Seite 4 zu Aufgabe 3