Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Simon Müller
WS 2016-2017

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Algebra B3

Blatt 1

R ist überall ein kommutativer Ring mit 1.

Aufgabe 1
(5 Punkte)

a) Sei $I \lhd R$ ein Ideal von R. Die Relation $\sim$ auf R wird dadurch definiert: $x \sim y$ gilt genau dann, wenn $x - y \in I$. Zeigen Sie:

  (i) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf R.

  (ii) die Verknüpfungen $(x + I) + (y + I) := (x + y + I)$ und $(x + I).(y + I) := (xy) + I$ auf R/I sind wohldefiniert. Dabei bezeichnet $x + I$ die Äquivalenzklasse von x.

  (iii) $(R/I, +, .)$ ist ein kommutativer Ring mit 1

b) Zeigen Sie, dass jeder endliche Integritätsbereich ein Körper ist.
Hinweis: Für ein beliebiges $a \in R$ betrachten Sie die Menge $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 2
(5 Punkte)
Sei ϕ die eulersche Phi-Funktion.

a) Zeigen Sie:

  (i) Für alle Primzahlen $p \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{N}$, $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.

  (ii) Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ mit $ggT(a, b) = 1$ gilt $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.

  (iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\phi(n) = n \prod_{p|n,\ p \text{ prim}} (1 - \frac{1}{p})$$

b) Geben Sie ein Beispiel für $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\phi(ab) \neq \phi(a)\phi(b)$.

Aufgabe 3
(5 Punkte)

a) Seien I, J zwei Ideale von R. Zeigen Sie:

  (i) $I + J := \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$ ist das kleinste Ideal, das $I \cup J$ enthält.

(ii) $IJ := \{\sum_{1\leq i\leq n} a_ib_i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in I, b_i \in J\}$ ist ein Ideal mit $IJ \subseteq I \cap J$. Geben Sie ein Beispiel für R, I, J an, so dass $IJ \neq I \cap J$.

b) Sei $\mathcal{I}$ eine Indexmege und für alle $i \in \mathcal{I}$ sei I_i ein Ideal von R. Zeigen Sie, dass $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} I_i$ auch ein Ideal von R ist.

c) Finden Sie ein Beispiel für R, I_1, I_2, wobei I_1, I_2 Ideale von R sind, so dass $I_1 \cup I_2$ kein Ideal von R ist.

Aufgabe 4
(5 Punkte)
Sei R ein Ring, $I \lhd R$ ein Ideal von R und $\varphi : R \to R/I$ der kanonische Homomorphismus.

a) Sei $\mathcal{R}_{R,I}$ die Menge der Unterringe von R, die I enthalten und $\mathcal{R}_{R/I}$ die Menge der Unterringe von R/I. Zeigen Sie, dass die Abbildung:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{R,I} & \to & \mathcal{R}_{R/I} \\ S & \mapsto & \varphi(S) \end{array}$$

bijektiv und inklusionserhaltend (d.h: $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow \varphi(S_1) \subseteq \varphi(S_2)$ für alle S_1, S_2) ist.

b) Sei $\mathcal{I}_{R,I}$ die Menge der Ideale von R, die I enthalten und $\mathcal{I}_{R/I}$ die Menge der Ideale von R/I. Zeigen Sie, dass die Abbildung:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}_{R,I} & \to & \mathcal{I}_{R/I} \\ J & \mapsto & \varphi(J) \end{array}$$

bijektiv und inklusionserhaltend ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte
Ein Element $a \in R$ heißt nilpotent, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $a^n = 0$. Zeigen Sie: falls a nilpotent ist, ist $1 + a$ eine Einheit.

Abgabe: Freitag, 4. November 2016, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.