Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Simon Müller
WS 2016-2017

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Algebra B3

Blatt 10

G ist überall eine Gruppe.

Aufgabe 1
(5 Punkte)
Sei $H \leq G$.

a) Zeigen Sie, dass $K := \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ ein Normalteiler von G mit $K \leq H$ ist, und dass jeder in H enthaltene Normalteiler von G in K enthalten ist.

b) In der Vorlesung wurde der Normalisator $N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ von H definiert. Zeigen Sie, dass $N_G(H)$ eine Untergruppe von G mit $H \lhd N_G(H)$ ist, und dass jede Untergruppe F von G mit $H \lhd F$ in $N_G(H)$ enthalten ist.

Aufgabe 2
(5 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Die n-te Diedergruppe D_n ist die Symmetriegruppe aller Drehungen und Spiegelungen eines regulären n-Ecks. Explizit wird D_n erzeugt von der Drehung a um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ und der Spiegelung b an einer Symmetrieachse des n-Ecks. Als Gruppe von Matrizen ist D_n die Untergruppe der invertierbaren Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$ erzeugt von

$$a = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & -\sin(\frac{2\pi}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $a^n = 1$, $b^2 = 1$ und $bab = a^{-1}$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass jedes Element aus D_n als $a^i b^j$ mit $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ und $j \in \{0, 1\}$ geschrieben werden kann und folgern Sie $|D_n| = 2n$.

c) Bestimmen Sie die Kommutatorgruppe von D_n.

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle n gerade und n ungerade.

Aufgabe 3
(5 Punkte)

a) Finden Sie alle Kompositionsreihen der Gruppen A_4, D_4 und D_5.

b) Zeigen Sie, dass D_n auflösbar ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4
(5 Punkte)
Sei $G = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ die Quaternionengruppe, also die Gruppe der Ordnung 8, in der Folgendes gilt:
$-1. - 1 = 1, i.i = j.j = k.k = ijk = -1$, und $-1.a = a. - 1 = -a$ für $a \in \{i, j, k\}$.

a) Zeigen Sie, dass alle Untergruppen von G normal sind.

b) Bestimmen Sie die Kommutatorgruppe von G und folgern Sie, dass G auflösbar ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte
(3 Punkte)
Notation: $SL_2(\mathbb{F}_3)$ bezeichnet die Gruppe aller Matrizen der Größe 2 mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_3$ und Determinante 1.

Zeigen Sie, dass $SL_2(\mathbb{F}_3)$ auflösbar ist.

Hinweis: Betrachten Sie $\{A \in SL_2(\mathbb{F}_3) \mid A^{2k} = I_2, k \in \{0, 1, 2\}\}$.

Abgabe: Freitag, 27. Januar 2017, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.