Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Simon Müller
WS 2016-2017

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Algebra B3

Blatt 13

Aufgabe 1

a) Sei L/K eine endliche Erweiterung und $S \subseteq L$ eine Teilmenge, so dass $L = K(S)$. Zeigen Sie, dass es eine endliche Teilmenge R von S gibt, so dass $L = K(R)$

b) Sei L/K eine endliche normale Erweiterung. Zeigen Sie, dass L der Zerfällungskörper einer endlichen Familie von Polynomen in $K[X]$ ist.

Aufgabe 2

Für diese Aufgabe dürfen Sie ohne Beweis die folgende Behauptung benutzen:
Sei $n \in \mathbb{N}$, $\zeta_n := e^{\frac{2i\pi}{n}}$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann haben ζ_n und ζ_n^k genau dann das gleiche Minimalpolynom über $\mathbb{Q}$, wenn $ggT(n,k) = 1$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f := X^n - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ und sei K der Zerfällungskörper von f. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ eine abelsche Gruppe der Ordnung $\phi(n)$ ist, wobei ϕ die eulersche phi-Funktion bezeichnet. Bestimmen Sie dann den Grad der Erweiterung $K/\mathbb{Q}$.

Aufgabe 3

Sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Zeigen Sie, dass die Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ galoissch ist. Bestimmen Sie dann $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ und geben Sie alle Zwischenkörper der Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ an.

Aufgabe 4

Sei $f = X^4 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$ und K der Zerfällungskörper von f. Bestimmen Sie $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ und finden Sie alle Zwischenkörper der Erweiterung $K/\mathbb{Q}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte

Sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt[8]{2}, i)$. Zeigen Sie:

(a) $Gal(K/\mathbb{Q}(i)) \cong C_8$

(b) $Gal(K/\mathbb{Q}(\sqrt{2})) \cong D_4$

(c) $Gal(K/\mathbb{Q}(i\sqrt{2})) \cong Q_8$, die Quaternionengruppe (siehe Aufgabe 10.4)