Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Simon Müller
WS 2016-2017

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Algebra B3

Blatt 4

R ist überall ein kommutativer Ring mit 1.
Für alle $\gamma \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$ bezeichnet $\mathbb{Z}[\gamma]$ den Ring $\{a + b\gamma \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Wir definieren die Abbildung N auf $\mathbb{Z}[\gamma]$ durch $N(x) = x\overline{x}$, wobei $\overline{x}$ das Konjugierte von x bezeichnet.

Aufgabe 1
(4 Punkte)
Sei R ein Integritätsring

a) Sei $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge und seien $r \in R, s \in S$. Zeigen Sie, dass $\frac{r}{s}$ genau dann invertierbar in $S^{-1}R$ ist, wenn $< r > \cap S \neq \emptyset$. Dabei bezeichnet $< r >$ das von r erzeugte Ideal in R.

b) Wir nehmen an, dass jedes $r \in R \backslash S$ mit $r \neq 0$ invertierbar in R ist. Was können Sie dann über $S^{-1}R$ sagen?

c) Sei $K := Quot(R)$, $\phi : R \to K$ die kanonische Einbettung. Zeigen Sie Folgendes:

   Für alle Körper F und alle Einbettungen $\psi : R \to F$ gibt es eine Einbettung $\chi : K \to F$, so dass $\psi = \chi \circ \phi$ (K ist also der kleinste Körper, der R enthält).

Aufgabe 2
(5 Punkte)
Das Ziel dieser Aufgabe ist, ein Beispiel für einen Ring zu sehen, der nicht faktoriell ist.

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 3$, das kein Quadrat ist. Sei $\gamma := i\sqrt{n}$ und $R := \mathbb{Z}[\gamma]$.

a) Zeigen Sie, dass $1, -1$ die einzige Einheiten in R sind.

b) Zeigen Sie, dass 2 und γ irreduzibel in R sind.

   Hinweis für a) und b): Bemerken Sie, dass $N(x) \in \mathbb{N}$ für alle $x \in R$ und dass die Abbildung N multiplikativ ist (d.h $N(ab) = N(a)N(b)$ für alle $a, b \in R$)

   Für c) und d) wählen wir $n = 6$.

c) Zeigen Sie, dass γ nicht prim ist und folgern Sie, dass R nicht faktoriell ist.

d) Zeigen Sie, dass das Ideal $< 2, \gamma >$ in R kein Hauptideal ist.

Aufgabe 3
(6 Punkte)
Zusammen mit der Zusatzaufgabe dient Aufgabe 3 dazu, ein kontretes Beispiel für einen Hauptidealbereich zu sehen, der nicht euklidisch ist.

Sei $\gamma = \frac{1+i\sqrt{19}}{2}$ und $R := \mathbb{Z}[\gamma]$. Wir wollen zeigen, dass R kein euklidischer Ring ist. Zu einem Widerspruch nehmen wir an, dass es ein $\phi : R \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ gibt, so dass (R, ϕ) euklidisch ist.

a) Prüfen Sie, dass $N(R) \subseteq \mathbb{N}$ und zeigen Sie, dass $N(a + b\gamma) \geq 5$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$.

b) Bestimmen Sie die Einheiten von R

c) Bestimmen Sie alle Teiler von 2 und 3 in R und zeigen Sie, dass 2 und 3 weder Teiler von $\gamma, \gamma - 1$ noch von $\gamma + 1$ sind.
Hinweis: Benutzen Sie N.

Wir wählen jetzt ein $x \in R \backslash \{0\}$, das keine Einheit ist und so, dass

$\phi(x) = \min\{\phi(y) \mid y \neq 0$ und y ist keine Einheit in $R\}$.

d) Zeigen Sie, dass für alle Nichteinheiten $y \in R$ entweder $x \mid y$ oder $x \mid y - 1$ oder $x \mid y + 1$ gelten muss. Folgern Sie dann aus c) ein Widerspruch.

Aufgabe 4
(5 Punkte)

a) Sei R ein Ring, $K :=$Quot(R). Wir nehmen an, dass es ein normiertes Polynom $f \in R[X]$ und zwei normierte Polynome $g, h \in K[X]$ vom Grad ≥ 1 gibt, so dass $f = gh$ und $g \notin R[X]$. Zeigen Sie, dass R nicht faktoriell ist.

b) Folgern Sie aus a), dass $\mathbb{Z}[2\sqrt{2}]$ kein faktorieller Ring ist.

Hinweis: betrachten Sie das Polynom $X^2 - 2$

Zusatzaufgabe für Interessierte
(3 Punkte)
Sei $\gamma = \frac{1+i\sqrt{19}}{2}$ und $R := \mathbb{Z}[\gamma]$ wie in Aufgabe 3. Wir wollen jetzt zeigen, dass R ein Hauptidealbereich ist.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[i\sqrt{19}]$ der Quotientenkörper von R ist.

b) Zeigen Sie: für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ und $c \in \mathbb{N}$ existieren $s, t \in R$, so dass

$$N\left(\frac{a + bi\sqrt{19}}{c}s - t\right) < 1$$

c) Folgern Sie aus b), dass R ein Hauptidealbereich ist.

Abgabe: Freitag, 25. November 2016, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.