Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Simon Müller
WS 2016-2017

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Algebra B3

Blatt 5

Aufgabe 1
(5 Punkte)

a) Geben Sie ein Beispiel für einen Ring an, der faktoriell aber kein Hauptidealring ist.

b) In der Vorlesung haben wir bewiesen, dass, falls R ein faktorieller Ring ist, alle Nichteinheiten $r \in R[X]\setminus\{0\}$ eine Darstellung als Produkt von irreduzibelen Elementen haben. Zeigen Sie, dass diese Darstellung eindeutig bis auf Reihenfolge und Assoziiertheit ist.
Hinweis: Betracthen Sie diese Darstellung in $K[X]$, wobei $K =$Quot(R).

Aufgabe 2
(4 Punkte)
Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und K ein Körper mit $\operatorname{char}(K) = p$.

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a, b \in K$,
$(a+b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}$.
Hinweis: Induktion nach n

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\sigma : K \to K, a \mapsto a^p$ ein Homomorphismus ist.

Aufgabe 3
(5 Punkte)

a) Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ mit $\deg(f) \in \{2, 3\}$. Zeigen Sie, dass f genau dann irreduzibel ist, wenn f keine Nullstelle hat. Geben Sie ein Gegenbeispiel in $\mathbb{Q}[X]$ mit $\deg(f) = 4$ an.

b) Erstellen Sie die Liste aller irreduzibelen Polynome vom Grad 3 in $\mathbb{F}_2[X]$.

c) Bestimmen Sie, ob folgende Polynome in $\mathbb{F}_2[X]$ irreduzibel sind. Falls nicht, geben Sie ihre Primfaktorzerlegung an:

   i) $X^4 + X^2 + 1$

   ii) $X^4 + 1$

   iii) $X^4 + X + 1$

Aufgabe 4
(6 Punkte)

a) Zeigen Sie mit so wenig Rechenaufwand wie möglich, dass folgende Polynome irreduzibel sind:

   i) $X^5 + 21X^4 + 39X^3 - 15X + 15$ in $\mathbb{Z}[X]$
   ii) $X^3 + 5X^2 + 27X + 22$ in $\mathbb{Z}[X]$
   iii) $X^3 + 14X^2 + 7X + 23$ in $\mathbb{Q}[X]$
   iv) $X^9 + 10X^7 + 55X^6 - 100X^2 + 20$ in $\mathbb{Q}[X]$
   v) $4X^3 + 12X^2 + 20$ in $\mathbb{Q}[X]$
   vi) $X^2Y^2 + X^3 - X^2 - Y + 1$ in $\mathbb{Q}[X, Y]$
   (*Hinweis: Betrachten Sie das Polynom in $R[X]$, wobei $R = \mathbb{Q}[Y]$*)

b) Sei $f := 4X^2 + 2$. Ist f in $\mathbb{Z}[X]$ irreduzibel? Ist es irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$?

Zusatzaufgabe für Interessierte
(2 Punkte)
Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ paarweise verschieden. Zeigen Sie, dass das Polynom $(X - a_1) \ldots (X - a_n) - 1$ irreduzibel über $\mathbb{Z}$ ist.

Abgabe: Freitag, 2. Dezember 2016, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.