Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Simon Müller
WS 2016-2017

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Algebra B3

Blatt 6

Aufgabe 1
(5 Punkte)
Sei $f := X^3 + X^2 - 2X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Zeigen Sie, dass f irreduzibel ist.

Sei θ eine Nullstelle von f in einer Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$.

b) Schreiben Sie $(\theta^2 - 1)^{-1}$und θ^5 als Linearkombination von $1, \theta, \theta^2$.

c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\theta^2 - 1)$.

Aufgabe 2
(5 Punkte)
Sei L/K eine Körpererweiterung.

a) Sei $[L : K] = p$ eine Primzahl. Zeigen Sie: für jedes $\alpha \in L \backslash K$ gilt $K(\alpha) = L$.

b) Sei $[L : K] = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Sei $f \in K[X]$ mit $\deg(f) = 3$, das eine Nullstelle in L hat. Zeigen Sie, dass f bereits eine Nullstelle in K hat.

Aufgabe 3
(5 Punkte)

a) Finden Sie das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}$.

b) Finden Sie das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Aufgabe 4
(5 Punkte)
Sei $f \in K[X]$ irreduzibel, $n = \deg(f)$ und α eine Nullstelle von f in einer Körpererweiterung von K

a) Wir nehmen an, dass n ungerade ist. Zeige Sie, dass $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.

b) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Aussage in a) falsch sein kann, wenn n gerade ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte
(3 Punkte)
Ein Körper K heißt *formal reell*, falls -1 keine Summe von Quadraten in K ist.
Sei K ein formal reeller Körper, $f \in K[X]$ irreduzibel, α eine Nullstelle von f in einer Körpererweiterung von K und $L := K(\alpha)$.

a) Wir nehmen an, dass L nicht formal reell ist. Zeigen Sie, dass es $n \in \mathbb{N}$ und $h, g_1, \dots, g_n \in K[X]$ gibt, so dass $-1 + hf = \sum_{k=1}^{n} g_k^2$ und $\deg(h) < \deg(f)$.

b) Zeigen Sie: Falls $[L : K]$ ungerade ist, ist L auch formal reell.
Hinweis: Nehmen Sie an, dass wir f, α wählen können, so dass $[L : K]$ nicht formal reell ist, und wählen Sie f so, dass $\deg f$ minimal ist. Folgern Sie dann aus a) einen Widerspruch.

c) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Aussage in b) falsch wird, wenn $[L : K]$ gerade ist.

Abgabe: Freitag, 9. Dezember 2016, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.