Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Simon Müller
WS 2016-2017

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Algebra B3

Blatt 7

Aufgabe 1
(5 Punkte)

a) Sei K das Kompositum von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Geben Sie ein $a \in K$ an, so dass $K = \mathbb{Q}(a)$, und bestimmen Sie $[K : \mathbb{Q}]$.

b) Sei K_1 der Zerfällungskörper von $f = (X^2-2)(X^2-3) \in \mathbb{Q}[X]$, und K_2 der Zerfällungskörper von $g = X^4 + 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Beschreiben Sie K_1 und K_2, indem Sie Erzeuger für sie finden. Bestimmen Sie dann $[K_1 : \mathbb{Q}]$ und $[K_2 : \mathbb{Q}]$.

Aufgabe 2
(5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass jeder algebraisch abgeschlossene Körper unendlich ist.

b) Sei K entweder $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{F}_p$ und $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K. Zeigen Sie, dass $[\overline{K} : K]$ unendlich ist.

Aufgabe 3
(5 Punkte)
Sei K ein Körper.

a) Seien $\bar{K}$ und $\tilde{K}$ zwei algebraische Abschlüsse von K. Seien $f \in K[X]$ irreduzibel, $\alpha \in \bar{K}$,$\beta \in \tilde{K}$ Nullstellen von f. Zeigen Sie, dass es ein Homomorphismus $\sigma : \bar{K} \to \tilde{K}$ gibt, so dass $\sigma(\alpha) = \beta$ und $\sigma_{|K} = id_K$.

b) Zeigen Sie, dass der algebraische Abschluss von K bis auf K-Isomorphie eindeutig bestimmt ist

Aufgabe 4
(5 Punkte)
Bestimmen Sie, ob folgende Polynome separabel sind:

i) $X^2 - 6X + 9$ in $\mathbb{Q}[X]$

ii) $X^{60} + X^{30} + 1$ in $\mathbb{F}_2[X]$

iii) $T^5 + XT + X$ in $\mathbb{F}_5(X)[T]$

Zusatzaufgabe für Interessierte
(2 Punkte)
Ein Ring R heißt *noethersch*, wenn jedes Ideal von R endlich erzeugt ist.

Sei F ein Körper und $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Variablen. Wir betrachten den Ring $R := F[(X_i)_{i \in I}]$ von Polynomen, deren Variablen eine endliche Teilmenge von $(X_i)_{i \in I}$ ist.

a) Zeigen Sie, dass R faktoriell ist

b) Zeigen Sie, dass R nicht noethersch ist.

Abgabe: Freitag, 16. Dezember 2016, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.